Квант

10
1977

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

Константин Эдуардович
Циолковский
(1857—1935)

Основан в 1970 году

Квант

10
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство „Наука"
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки вы видите цветную фотографию, полученную с помощью автоматической станции «Зонд-7». На фотографии четко видны восточный сектор обратной стороны Луны и планета Земля. Подробнее об исследовании Луны и Земли из космоса можно прочитать в статье В. Большакова (см. с. 26).

И. Кикоин

Как создавалась советская физика

Редакция обратилась к Герою Социалистического Труда, академику И. К. Кикоину с просьбой рассказать об основных этапах становления советской физики. Исаак Константинович Кикоин начал заниматься физикой в 1927 году — в год десятилетия Советской власти. Ему посчастливилось работать со многими замечательными учеными, которых по праву можно считать основоположниками советской физики. Поэтому его рассказ — это рассказ очевидца и участника описываемых событий.

В этом номере мы начинаем публикацию воспоминаний академика И. К. Кикоина. Публикация подготовлена Т. Петровой и И. Слободецким.

С первых же лет своего существования молодое советское государство уделяло огромное внимание развитию отечественной науки. По инициативе и при активной поддержке Владимира Ильича Ленина в стране было создано немало новых научных центров. Одним из них был Ленинградский физико-технический институт, основанный в 1918 году академиком Абрамом Федоровичем Иоффе. В этом институте я и начал заниматься физикой.

До революции наука в России развивалась в основном в университетах и была оторвана не только от практической жизни, но даже и от настоящей современной науки. Абрам Федорович Иоффе рассказывал, что, когда он начал заниматься физикой, в университетах России господствовала такая точка зрения на работу ученого-физика: дело научного работника — повторять опыты, которые ставились за границей, а новые идеи и самостоятельные работы считались немыслимыми, потому что, мол, у нас нет достаточно подготовленных ученых.

Еще в 1918 году, сквозь дым пожара гражданской войны, А. Ф. Иоффе сумел увидеть будущие контуры социалистической страны и понять, что будущая техника и промышлен-

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе ность должны базироваться на хорошо развитой физической науке. А для этого нужны были физики, знакомые с техникой, которые могли бы в будущем связать физическую науку с потребностями техники. Для подготовки таких специалистов Иоффе создал в Ленинградском политехническом институте физико-механический факультет. На этот факультет я и поступил в 1925 году.

Учиться на факультете было трудно, потому что физико-математические дисциплины преподавались на уровне университетской пограммы, а вместе с тем студенты должны были изучать инженерные дисциплины. Поступив в институт, я сразу погрузился в атмосферу настоящей науки.

Мы, студенты, знали, что наш декан — знаменитый ученый, именем которого назван открытый им эффект. Эффект Иоффе заключается в том, что при смачивании поверхности кристалла каменной соли ($NaCl$) водой его прочность возрастает в несколько сот раз. Результаты необычайно простого по исполнению опыта, поставленного Иоффе, имели чрезвычайно важное значение. И вот почему.

В 1915 году замечательный немецкий физик Макс Борн создал строгую теорию кристаллов. Эта теория объясняла оптические, электрические и другие свойства различных кристаллов. Многочисленные экспериментальные данные, имевшиеся в то время, подтверждали справедливость теории. И только в одном теория резко расходилась с экспериментом — в оценке прочности кристаллов. Было, например, известно, что кристалл каменной соли при его растяжении разрушается, когда возникающие в нем в результате деформации напряжения составляют приблизительно $4{,}5\cdot10^6$ Н/м². (Напряжением σ называют отношение силы упругости $|\vec{F}_{\text{упр}}|$ к площади S поперечного сечения образца, перпендикулярного направлению деформации: $\sigma = |\vec{F}_{\text{упр}}|/S$. Значение σ, при котором образец разрушается, называют пределом прочности.) А теоретический расчет давал совершенно иную оценку —

Абрам Федорович Иоффе (1880—1960)

порядка 10^9 Н/м². И объяснить это расхождение в рамках теории Борна никому не удавалось.

А. Ф. Иоффе предположил, что рассматриваемая в теории модель разрушения кристалла отличается от того, что происходит в реальном кристалле при его деформации. Теоретические расчеты предела прочности делались в предположении, что кристалл разрушается мгновенно по всему сечению образца. Иоффе же предположил, что разрушение кристалла проходит постепенно. Начинается оно в каком-то самом «слабом» месте, а потом распространяется вдоль по сечению образца. Постепенность разрушения связана с тем, что на поверхности кристалла имеются микроскопические трещины. С такой трещинки и начинается разрушение при напряжениях, конечно, меньших, чем теоретические значения пределов прочности. Трещинка постепенно разрастается и приводит к разрыву всего кристалла.

Идея опыта, который А. Ф. Иоффе поставил для проверки своего предположения, была необычайно проста. Тонкий монокристаллический образец каменной соли погружался частично в теплую воду. Вода постепенно растворяла соль, мокрая часть образца становилась тоньше, но поверхность ее делалась гладкой, трещины исчезали. В таком виде образец подвергался растяжению. Опыты показали, что сухая часть образца разрушалась при напряжениях $4{,}5 \times 10^6$ Н/м², а погруженная в воду часть образца выдерживала напряжения до $1{,}6 \cdot 10^9$ Н/м². Так блестяще подтвердилась гипотеза А. Ф. Иоффе.

Многие физики считали, что предложенная Иоффе модель разрушения кристалла не соответствует действительности. Но многократно повторенные убедительные опыты подтвердили ее правильность. И обнаруженному Иоффе явлению повышения прочности кристаллов при сглаживании их поверхности было присвоено название «эффекта Иоффе».

На одной из своих популярных лекций студентам-первокурсникам А. Ф. Иоффе иллюстрировал свою идею следующими простыми опытами. Он брал прямоугольную полоску бумаги и пытался ее разорвать, непосредственно растягивая ее руками. Для этого ему приходилось прилагать значительное усилие. Но стоило эту полоску чуть надорвать поперек (то есть создать в ней «трещинку»), как разрыв ее происходил при ничтожном усилии. (Читатель легко сам может повторить этот опыт.) Другой опыт проводился со стеклянными палочками. Абрам Федорович приготовил к лекции стеклянные палочки диаметром 2—3 мм, которые в течение нескольких часов были погружены в сосуд с дистиллированной водой. Такие же, но сухие палочки лежали рядом на столе. Попытка согнуть сухие палочки в «дугу» неизменно кончались неудачей — палочки ломались. Палочки же, только что вынутые из воды, легко сгибались в обруч! Объясняется это тем, что, хотя и много медленнее, чем соль, но стекло тоже растворяется в воде, и вода «смывает» трещинки с поверхности палочек.

Мы, студенты, очень внимательно следили за научными успехами наших профессоров, болели за них. Мы очень гордились тем, что у нас на факультете работает Александр Александрович Фридман — один из крупнейших механиков в мире. Мы знали, понаслышке, что он внес очень существенный вклад в общую теорию относительности, поправив самого Эйнштейна.

Александр Александрович Фридман (1888—1925)

Эйнштейн в первой четверти XX столетия сформулировал вслед за специальной теорией относительности общую теорию относительности. Эта теория позволяла создать математическую модель Вселенной — составить систему уравнений, решение которой описывало состояние Вселенной. Сам Эйнштейн нашел стационарное решение, и модель Вселенной, построенная Эйнштейном, была статичной, неизменной во времени. Фридман догадался, что наряду со статическим решением Эйнштейна существует динамическое решение. Это означает, что состояние Вселенной постоянно изменяется во времени, Вселенная расширяется.

Известно, что поначалу Эйнштейн встретил эту работу Фридмана в штыки, но потом понял, что идея, которую высказал Фридман, справедлива*.) Оказалось, что расширение Вселенной следует из общей теории относительности. Когда это было учтено, теория относительности стала практически законченной теорией. Таким образом, Фридман наряду с Эйнштейном является одним из авторов общей теории относительности. Мы этим очень гордились.

У нас в институте Фридман читал курс механики. А в нашей студенческой библиотеке был отпечатанный курс лекций, прочитанных Фридманом в Военно-морской академии. Назывался он «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости». Мы тогда еще не понимали, что это означает. И только потом мы узнали, что в нем впервые была решена задача о движении жидкости или газа с очень большими скоростями, когда жидкость или газ принципиально нельзя считать идеальными и надо учитывать их сжимаемость. Теперь эта работа Фридмана стала общепринятой теорией, на которой основана вся гидромеханика сверхзвуковых скоростей. Этот раздел гидромеханики называется газовой динамикой. Так что родоначальником газовой динамики был наш профессор А. А. Фридман. К сожалению, он погиб очень рано — в 1925 году, когда ему было всего 37 лет.

Напротив нашего института, через улицу, которая называлась «Дорога в Сосновку», находился Ленинградский физико-технический институт (тогда он назывался Физико-технический рентгеновский институт). Директором его был академик А.Ф. Иоффе. Зрелых физиков в этом институте было очень мало. Был сам академик Иоффе; он привлек к работе профессора Дмитрия Аполлинариевича Рожанского, крупного радиофизика; привлек Ивана Васильевича Обреимова, недавно окончившего университет (ныне академика); пригласил работать недавно кончившего университет Николая Николаевича Семенова (ныне академика, Нобелевского лауреата); к работе был привлечен профессор Яков Ильич Френкель, крупный ученый, один из основателей советской теоретической физики; был привлечен Александр Алексеевич Чернышев — крупный электрик, который занимался вопросами электротехники. Основную массу сотрудников составляли молодые люди, начавшие работу, будучи студентами физико-механического факультета. На этом основании недруги коренного, я бы сказал, революционного преобразования в физике и в развитии научных работ, которое начиналось в физико-техническом институте, называли этот институт детским садом. Тем не менее, ЛФТИ уже стал одним из основных центров физической науки в СССР.

Отбирались студенты на работу в институт таким способом. Преподаватели факультета — сотрудники института, в том числе и студенты старших курсов, которые руководили лабораторными работами студентов, имели указания А. Ф. Иоффе присматриваться к студентам, которые проявляют интерес и способности к экспериментальной физике, и приглашать их на работу в Физико-технический институт. В 1927 году, будучи студентом второго курса, я был приглашен на работу в Физико-технический институт. Там молодежь сразу приобщалась к современной науке. С нами не очень нянчились и не считались с тем, что у себя на факультете мы еще чего-то «не проходили». На научных семинарах, которые происходили регулярно по пятницам, с 5 до 7 вечера, разбирались научные работы, только что сделанные сотрудниками института или опубликованные в зарубежных журналах. Мы принимали участие в работе семинара, должны были слушать и понимать, о чем идет речь, а если не понимали, то спрашивать.

*) 18 сентября 1922 года Эйнштейн опубликовал свое «Замечание к работе А. Фридмана «О кривизне пространства», в котором он писал: «Результаты относительно нестационарного мира, содержащиеся в упомянутой работе, представляются мне подозрительными». Но уже 31 мая 1923 года Эйнштейн писал: «В предыдущей заметке я подверг критике работу Фридмана... Однако моя критика, как я убедился... основывалась на ошибке в вычислениях. Я считаю результаты Фридмана правильными ...»

В первое время мы даже не решались спрашивать, потому что не понимали ничего. Но довольно быстро понимание наступило, по-видимому, потому, что мы привыкли к стилю изложения и сами много читали.

У нас на факультете были, конечно, учебные студенческие семинары. Одним из них руководил профессор Рожанский, а другим — профессор Френкель. На этих семинарах разбирались самые современные вопросы физики, и мы довольно быстро усваивали, какие проблемы волнуют физиков. В частности, в 1927 году на семинаре профессора Рожанского разбиралась только что вышедшая работа Дэвиссона и Джермера, в которой впервые было экспериментально показано, что при отражении электронов от кристаллов наблюдается дифракционная картина, как при рассеянии самого обычного света на дифракционной решетке. Мы знали, что дифракция света объясняется тем, что свет — это волна. Но электрон считался нормальной частицей, подчиняющейся законам механики. И сначала представлялось просто невозможным понять, почему отражение электронов происходит так, как будто на поверхность кристалла падает не пучок частиц, а пучок света. Этот вопрос мы и разбирали на семинаре Рожанского, на котором подробно разбирался опыт Дэвиссона и Джермера (докладывали студенты) и обсуждалась его интерпретация. Этот опыт был первым убедительным доказательством справедливости предположения, сделанного в 1924 году французским физиком де Бройлем, о том, что движущиеся электроны проявляют свойства не только частиц (корпускул), но и волн, подобно тому, как электромагнитное излучение, например, свет обладает свойствами как волн, так и частиц. И еще де Бройль предположил, что соотношения между корпускулярными характеристиками и волновыми должны быть одними и теми же для электронов и излучения. Опыт Дэвиссона и Джермера показал, что действительно электроны при отражении от поверхности кристалла ведут себя как волны, и что длина

Дмитрий Аполлинариевич Рожанский (1882—1936)

волны λ, соответствующая движущемуся электрону, равна h/mv, где h — постоянная Планка, m — масса электрона, v — его скорость. В наши дни это стало уже тривиальностью.

На семинаре Френкеля тоже разбирался вопрос, который волновал физиков того времени. Вопрос касался не отдельных атомов и не отдельных электронов, а строения вещества. Мы уже знали, что атомы притягиваются, пока расстояние между ними примерно равно размеру атома. А при дальнейшем сближении атомов между ними начинают действовать силы отталкивания. Но было непонятно, почему атомы располагаются в твердом теле, образуя правильную кристаллическую решетку.

Тогда теорией твердого тела занимались довольно мало. Начало созданию современной теории твердого тела положил Эйнштейн. В 1907 году он разработал квантовую теорию теплоемкости твердого тела. Твердое тело Эйнштейн рассматривал как совокупность атомов, совершающих колебания около положения равновесия с одной и той же частотой. При

Яков Ильич Френкель (1894—1952)

нагревании тела меняется амплитуда этих колебаний, следовательно, меняется и энергия колеблющихся атомов. Изменение энергии тела при его нагревании на один градус и есть теплоемкость тела. Формула Эйнштейна для теплоемкости твердого тела правильно описывала характер изменения теплоемкости с температурой, но при низких температурах рассчитанные по этой формуле значения теплоемкости не совпадали с экспериментальными результатами.

Теорию Эйнштейна усовершенствовал Дебай в 1912 году. Он предположил, что атомы в твердом теле колеблются не независимо, они связаны между собой и образуют единую колебательную систему. Расчеты, основанные на этом предположении, дали прекрасное совпадение теоретических значений теплоемкости с экспериментальными данными. Они, в частности, согласовывались с давно известным фактом — так называемым законом Дюлонга и Пти, по которому теплоемкость одного моля любого твердого вещества одна и та же и равна 25 Дж/(моль·К).

Но в разработанной теории теплоемкости было одно «темное место» — это теплоемкость металлов. Металл, как известно, состоит из ионизированных атомов, образующих кристаллическую решетку, и свободных электронов. Эти свободные электроны ведут себя как обычный идеальный газ (его называют электронным газом). Казалось бы, теплоемкость 1 моля металла должна складываться из теплоемкости решетки (25 Дж/(моль·К)) и теплоемкости электронного газа. А последнюю подсчитать совсем нетрудно — как теплоемкость одноатомного идеального газа: энергия E одного моля газа равна $^3/_2RT$ (R — универсальная газовая постоянная), а теплоемкость

$$C=\frac{\Delta E}{\Delta T}=\frac{3}{2}\cdot\frac{R\Delta T}{\Delta T}=\frac{3}{2}R\approx 12{,}5\text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}.$$

Итак, теплоемкость моля металла должна бы равняться приблизительно 37,5 Дж/(моль·К). А измерения показывали, что она равна 25 Дж/(моль·К). Это было настолько непонятно, что физики называли этот парадокс «катастрофой теплоемкости».

Объяснить этот факт стало возможно только с появлением квантовой механики. Квантовомеханическую теорию электронного газа в металле разработали Зоммерфельд в Германии, а у нас в Советском Союзе профессор Яков Ильич Френкель. Согласно этой теории свойства электронного газа существенно отличаются от свойств одноатомного газа. В частности, при обычных (не очень высоких) температурах энергия свободных электронов в металле практически не зависит от его температуры, тогда как кинетическая энергия атомов газа прямо пропорциональна температуре. Иными словами, при нагревании металла его внутренняя энергия изменяется только за счет изменения энергии колебания атомов (точнее — ионов) кристаллической решетки; энергия же электронного газа остается неизменной. Следовательно, теплоемкость металлов — это теплоемкость атомов его решетки и равна она 25 Дж/(моль·К). Так была устранена «катастрофа теплоемкости».

На семинаре Я. И. Френкеля он сам рассказывал нам элементы теории Зоммерфельда и о своих исследованиях в этом направлении.

Была еще одна проблема в физике металлов, которая волновала ученых. Есть такое явление, которое называется эффектом Холла. Заключается оно в следующем. Представим себе прямоугольную металлическую пластину, вдоль которой течет электрический ток I (рисунок 1). Очевидно, что между точками A и A' пластины напряжение равно нулю. Но если эта пластина помещена в магнитное поле, индукция $\vec{B}$ которого перпендикулярна плоскости пластины, то между точками A и A' возникает некоторое напряжение U, которое называют э. д. с. Холла. Э. д. с. Холла можно измерить с помощью гальванометра, подсоединенного проводниками к точкам A и A'.

Возникновение в проводнике с током под действием магнитного поля разности потенциалов в направлении, поперечном по отношению к направлению тока, и называется эффектом Холла. (Это явление было теоретически предсказано в шестидесятых годах прошлого столетия Максвеллом.) Как объяснить возникновение э. д. с. Холла?

Известно, что ток представляет собой движение электронов, а на электрон, движущийся в магнитном поле со скоростью $\vec{v}$, перпендикулярной к индукции поля $\vec{B}$, действует сила Лоренца $\vec{F}_л$, равная по абсолютной величине $e|\vec{v}||\vec{B}|$. Направление силы Лоренца определяется правилом левой руки (если левую руку расположить так, чтобы вектор $\vec{B}$ «входил» в ладонь, четыре сложенных пальца были вытянуты вдоль направления, противоположного направлению скорости $\vec{v}$ электрона, то отогнутый большой палец укажет направление силы Лоренца). Пусть пластина расположена в магнитном поле так, как показано на рисунке 1. По пластине вдоль оси Y течет ток (скорость электронов направлена в противоположную сторону!). Тогда под действием силы Лоренца электроны будут отклоняться к грани a' пластины, и на этой грани скопится избыточное количество электронов. Накопившиеся электроны создают внутри пластины электростатическое поле, напряженность которого пропорциональна их числу. В этом поле на электроны действует сила $|\vec{F}_э|=e|\vec{E}|$, направленная противоположно силе Лоренца, то есть тормозящая их. Очевидно, что когда эта сила станет равной силе Лоренца, действующей на «протекающий» по пластине электрон, поперечное перемещение электронов прекратится. Из условия равенства этих сил можно найти напряженность $|\vec{E}|$ установившегося электростатического поля внутри пластины:

$$e|\vec{E}| = e|\vec{B}||\vec{v}|,$$

откуда

$$|\vec{E}| = |\vec{B}||\vec{v}|.$$

При этом между точками A и A' пластины установится разность потенциалов

$$U = |\vec{E}|b = |\vec{B}||\vec{v}|b,$$

где b — ширина пластины. Скорость электронов легко определить, зная ток I, концентрацию n электронов в образце (число их в единице объема) и площадь S сечения пластины, перпендикулярного направлению тока. Действительно,

$$I = ne|\vec{v}|S,$$

откуда

$$|\vec{v}| = I/neS = I/nebd$$

(d—толщина пластины).

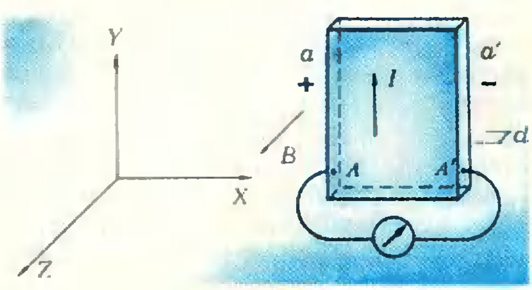


Рис. 1.

Таким образом, напряжение U, возникающее между точками A и A' пластины, равно

$$U = |\vec{B}|I/ned.$$

Эту разность потенциалов впервые обнаружил и измерил американский физик Холл.

Итак, электронная теория металлов довольно просто объясняет эффект Холла. Однако, в этом вопросе существовала одна трудность. Из приведенного выше объяснения следует, что знак э. д. с. Холла определяется только направлением тока, протекающего через пластину, и направлением магнитного поля и должен быть одним и тем же для всех металлов. Между тем опыты показали, что у ряда металлов э. д. с. Холла имеет обратный знак, как будто в них носители тока не электроны, а положительные заряды. Этому никто не мог найти объяснения.

И только в тридцатых годах ученик Зоммерфельда Рудольф Пайерлс дал объяснение этому явлению. Он сумел это сделать на основе квантовомеханических представлений о поведении электронов в металлах. Как почти всем квантовым явлениям, дать наглядное объяснение возникновения обратной э. д. с. Холла нельзя.

Когда работа Пайерлса появилась в печати, Френкель поручил мне рассказать ее на нашем «пятничном» семинаре в институте. Плохо понимая эту работу, я все же выполнил поручение Френкеля. И только после «дополнений» к моему докладу, сделанных Яковом Ильичом, я сам и, думаю, слушатели, поняли, о чем писал Пайерлс.

В теории металлов был еще один вопрос, связанный с эффектом Холла. Дело в том, что в то время эффект Холла наблюдали только в твердых металлах, и никому не удалось наблюдать его в жидких металлах. А из теории следовало, что эффект в жидких металлах может быть меньше, чем в твердых, но все же он должен быть.

Когда я начал работать в Ленинградском физико-техническом институте, под влиянием лекций и семинаров Я. И. Френкеля, который рассказывал нам о современных идеях в физике металлов, я решил заняться вопросами именно этой области физики и, прежде всего, эффектом Холла. Я решил проверить, возникает ли эффект Холла в жидких металлах. Этим вопросом ранее, в начале века, занимались такие корифеи науки, как Нернст, Друде. Просмотрев имевшуюся по этому вопросу литературу, я пришел к выводу, что выбор жидких металлов в проводившихся ранее опытах был сделан неудачно. В первых экспериментах в качестве образца выбирали ртуть, потому что при комнатной температуре она всегда в жидком состоянии. Эффекта Холла в ней не обнаружили. Как потом, оказалось, и в твердой ртути этот эффект очень мал, и его трудно измерять. Проводились опыты и с висмутом. Висмут казался очень подходящим образцом, поскольку в твердом висмуте э. д. с. Холла на несколько порядков больше, чем в других металлах: в «обычных» металлах она измеряется в микровольтах, а в висмуте — в милливольтах. Однако в жидком висмуте эффекта не обнаружили. Теперь известно, что аномально большой эффект Холла в твердом висмуте связан с особенностями его кристаллической структуры. В жидком состоянии эта структура пропадает. А экспериментаторы, собиравшиеся измерить большой эффект, увидев, что в 1000 раз меньше ожидаемого, пришли к выводу, что эффекта просто нет.

Я решил взять в качестве образца металл, который является наиболее простым. Это — щелочной металл. Щелочные металлы хороши тем, что у них практически все теоретические предсказания относительно их свойств хорошо оправдываются в опытах. Я выбрал для эксперимента сплав натрия с калием, который при известной концентрации компонент становится жидким уже при комнатной температуре.

Мне представлялось, что отрицательные результаты в предыдущих опытах связаны не только с неудачным выбором образцов, но и с недостаточно точной постановкой эксперимента. Дело в том, что когда через жидкий металл, находящийся в магнитном поле, пропускают ток, то со стороны магнитного поля на металл начинают действовать силы, которые приводят к смещению отдельных слоев жидкого металла друг относительно друга. (В твердом металле этого перемещения слоев, естественно, нет.) В результате возникают вихревые токи, которые «смазывают» эффект Холла в жидком металле. Так что необходимо, если не свести на нет, то максимально уменьшить влияние этих «паразитных» токов. Для этого мы взяли образец в виде тонкого слоя жидкого металла. Тщательно проведенные измерения обнаружили наличие эффекта Холла. Года через полтора вышла работа Зоммерфельда, в которой рассказывалось об опытах, подтверждающих современную теорию металлов. Ссылался Зоммерфельд и на наш опыт. По правде говоря, я был необыкновенно горд собой — такой авторитет, как Зоммерфельд, оценил мою работу.

Была еще одна проблема в физике металлов, которая тогда очень волновала физиков-теоретиков — вопрос о ферромагнетизме. Было хорошо известно, что из всех металлов, которые имеются в природе, только три металла являются ферромагнитными — это железо, никель и кобальт. (Сейчас их известно значительно больше.) Они отличаются тем, что их намагниченность, появляющаяся в очень слабом магнитном поле, довольно большая, в несколько сотен тысяч раз больше, чем у обычных металлов. Например, чтобы в обычном металле получить такую же намагниченность, какая появляется у железного образца в поле $\sim 0{,}01$ Т, необходимо иметь внешнее магнитное поле ~ 1000 Т. Для объяснения этого непонятного явления французский физик Вейсс создал теорию, согласно которой в ферромагнитных металлах — в железе, никеле и кобальте — существуют области, в которых магнитные поля отдельных атомов ориентированы строго параллельно друг другу. Так что суммарное магнитное поле такой области — ее называют доменом (от французского слова «domain» — область) — достаточно большое. Размеры этих областей очень маленькие — порядка долей микрона, но в каждой из них умещается много сотен тысяч ориентированных «элементарных магнитиков». Сами домены распределены по металлу совершенно хаотически, так что в обычном состоянии (в отсутствие внешнего магнитного поля) намагниченность ферромагнитного образца равна нулю.

Когда такой образец помещается в магнитное поле, то происходит ориентация магнитных полей отдельных доменов вдоль внешнего поля, и образец в целом сильно намагничивается. А ориентировать целые домены легче, чем огромное количество отдельных «элементарных магнитиков».

Вот так, грубо говоря, выглядела теория ферромагнетизма, предложенная Вейссом. Для того чтобы объяснить наличие доменов — наличие областей с ориентированными «элементарными магнитиками» — Вейсс предположил существование внутри металла особого магнитного поля, которое ориентирует магнитные поля внутри доменов. Это поле — Вейсс назвал его молекулярным магнитным полем — по подсчетам Вейсса должно быть порядка 1000 Т. Однако происхождение этого поля было совершенно непонятно.

Чтобы обнаружить это огромное гипотетическое поле, профессор Яков Григорьевич Дорфман, в лаборатории которого я тогда работал в Ленинградском физико-техническом институте, проделал такой опыт. Он установил в магнитном поле тонкую железную фольгу так, что плоскость листочка фольги была параллельна индукции поля. Фольга очень сильно намагничивалась. Сквозь фольгу, перпендикулярно ее поверхности, и следовательно, перпендикулярно внешнему магнитному полю, пропускался пучок быстрых электронов, испускаемых радиоактивным источником, «вырезаемый» установленной перед фольгой щелью (рисунок 2). За фольгой была установлена фотопластинка. Пролетевшие через фольгу электроны попадали на пластинку, вызывая ее почернение. Если, проходя фольгу, электроны попадают в громадное молекулярное поле, то оно должно привести к смещению положения почернения на пластинке. Однако это смещение в эксперименте не наблюдалось. Отсюда следовало, что если существуют такие силы, которые ориентируют «элеметарные магнитики» в отдельных доменах, то они не магнитные, потому что на движущийся электрон они практически не действуют.

И только в 1928 году Я. И. Френкель в Ленинградском физико-техническом институте и почти одновременно с ним немецкий физик Гейзенберг создали квантовомеханическую теорию ферромагнетизма. Они показали, что на самом деле никакого молекулярного поля нет. Силы, которые ориентируют «элементарные магнитики» внутри доменов — электрические силы специфического характера. Их называют теперь обменными силами. Небольшая статья об этом была опубликована Френкелем в 1928 году в июньском номере немецкого физического журнала «Zeitshrift für Physik», а в июльском номере этого же журнала появилась подробная статья Гейзенберга. Так что независимо друг от друга они создали теорию ферромагнетизма. (Впоследствии Яков Ильич Френкель говорил мне, что он занялся ферромагнетизмом потому, что мы, экспериментаторы, постоянно его «намагничивали»).

После создания теории ферромагнетизма появилось много работ, посвященных вопросам магнетизма в металлах. В частности, было показано, что, как и следует из теории, обменные силы могут возникать только в кристаллах. Жидких ферромагнетиков быть не может. Было также показано, что вдоль разных направлений внутри кристалла обменные силы различны. То есть было показано, что имеется резко выраженная анизотропия магнитных свойств ферромагнитных кристаллов. Это и сейчас имеет очень большое значение при создании новых магнитных материалов, на которых базируется вся электротехника. И трансформаторы, и генераторы, и электродвигатели — все сделаны из ферромагнитных материалов, и их характеристики существенно зависят от свойств самого ферромагнитного материала. Несколько позже теорию ферромагнетизма развили наш выдающийся теоретик Лев Давыдович Ландау и его ученик Евгений Михайлович Лифшиц. Теперь современная теория ферромагнетизма целиком базируется на работах Френкеля, Гейзенберга, Ландау и Лифшица.

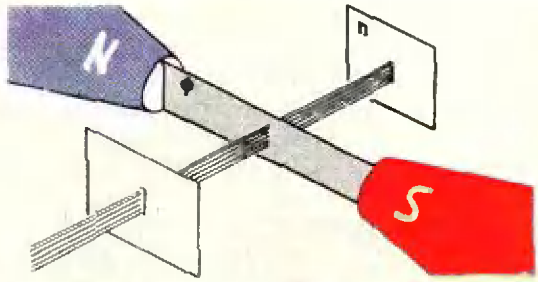


Рис. 2.

Как я уже говорил, у нас на физико-механическом факультете были учебные семинары. Один из таких семинаров был организован для студентов 4—5 курсов. Назывался этот семинар расчетным, и вел его наш профессор академик Владимир Александрович Фок. Проходил семинар не совсем обычно. Фок придумывал какую-нибудь хитрую задачу, решения которой он сам не знал. И тут же у доски он вместе с нами (вернее, мы вместе с ним) начинал решать ее. Так что мы могли наблюдать, так сказать, «творческую кухню» такого замечательного теоретика, каким был В. А. Фок.

И вот мы видели, как он подходил к решению задачи: пробовал один способ — не получалось; он стирал с доски, пробовал другой способ — тоже не получалось. В конце концов, рано или поздно, решение отыскивалось. Иногда на этом же занятии, иногда на следующем. Мы видели не просто готовое решение, а как постепенно находились пути к этому решению. Это было очень поучительно для нас. Однажды на семинаре Владимира Александровича был такой случай. Решали мы какую-то сложную несимметричную задачу по электростатике. На первом семинаре мы решения не нашли, а на следующем, в конце концов, получили длиннющее дифференциальное уравнение. Оно занимало всю доску. За математическими выкладками мы следили очень внимательно, так что с математикой все было в порядке, а вот усмотреть физический смысл скрытый за этой длинной формулой, мы не могли. Кто-то из студентов спросил Владимира Александровича: «А какой физический смысл имеет это уравнение?». Он на нас посмотрел с укором и сказал: «А физический смысл этого уравнения заключается в том, что оно имеет решение».

В. А. Фок занимался различными проблемами теоретической физики. Но наряду с этим он не гнушался решений прикладных задач, чисто практических. В частности, его привлекли геофизики для решения ряда задач о распределении электрического поля внутри Земли. Это решение было очень важным для геологической разведки. Фок решил эту задачу вместе с В. К. Фредериксом. Вообще, для всего стиля работы Ленинградского физико-технического института было характерно, что наряду с разработкой теоретических и экспериментальных проблем физики большое внимание уделялось решению чисто прикладных задач, связанных с нуждами техники, промышленности и сельского хозяйства.

В 1930 году, когда я только что окончил институт и получил звание инженера-физика, по рекомендации А. Ф. Иоффе меня направили в командировку в Германию, чтобы ознакомиться с физическими лабораториями запада. Я пробыл в Германии около трех месяцев и смог познакомиться с работами физических лабораторий Лейпцига, Мюнхена, Гамбурга. И нужно сказать, что я был очень удовлетворен, когда убедился, что уровень наших физиков, в частности, мой собственный уровень, был ничуть не ниже уровня физиков, с которыми я встречался в лабораториях за рубежом. Правда, они имели некоторое преимущество по сравнению с нами: их лаборатории были очень хорошо оснащены приборами. У нас в Советском Союзе не было еще тогда отечественного приборостроения, нам часто приходилось самим делать приборы, либо покупать их за рубежом, а это было трудно в те времена, когда большие средства затрачивались на развитие народного хозяйства. Но в смысле уровня знаний, уровня понимания, даже техники эксперимента мы находились, как я убедился, не ниже, чем самые крупные университетские лаборатории Германии.

Находясь в командировке, я около месяца работал в лаборатории в Мюнхене, в бывшей лаборатории Рентгена. Там работали и университетские докторанты (так назывались у них заканчивающие университет студенты, которые готовят дипломные работы). Однажды я заметил, что докторанты, готовясь к выпускным экзаменам, читают книгу Я. И. Френкеля «Курс электродинамики», изданную на немецком языке. Я спросил: «А кому вы сдаете экзамены?», они ответили: «Зоммерфельду». Тому самому Зоммерфельду, крупнейшему теоретику мирового класса, про которого у нас, когда мы были студентами, ходила поговорка «нет Бора кроме Бора, и Зоммерфельд его пророк». Я знал, что имеется пятитомный курс физики самого Зоммерфельда, и спросил, почему докторанты учат электродинамику не по Зоммерфельду, а по Френкелю. А потому, ответили они, что Зоммерфельд сказал, что он будет принимать экзамены только по курсу Френкеля, поскольку лучшего курса в мире сейчас нет. Когда я сказал, что лично знаком с Френкелем, то почувствовал, что мой авторитет в их глазах резко возрос. А я испытал чувство истинной гордости за наших советских физиков, заслуживших широкое признание в среде крупнейших теоретиков мира.

Н. Н. Лузин (1883—1950)

Лузинская математическая школа

П. Александров

Автор этой статьи — один из крупнейших советских математиков, Герой Социалистического Труда, академик Павел Сергеевич Александров. В статье рассказывается о становлении одной из самых плодотворных математических школ — школы академика Н. Н. Лузина. Слева (в узкой колонке) разъясняются мало знакомые школьникам термины, встречающиеся в статье.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — часть геометрии, изучающая гладкие кривые линии и поверхности методами дифференциального исчисления. В ней рассматриваются свойства касательных прямых к плоским и пространственным кривым, касательных плоскостей к кривым поверхностям, различные типы ли-

Современная московская математическая школа теоретико-множественной математики возникла в первые годы революции в стенах Московского университета. Ее основателями были Дмитрий Федорович Егоров и Николай Николаевич Лузин.

В предшествовавшие ее возникновению десятилетия, начиная с семидесятых годов девятнадцатого века, интересы математиков Москвы концентрировались главным образом вокруг проблем дифференциальной геометрии и механики.

Эти проблемы, тесно связанные с теорией дифференциальных уравнений с частными производными и теорией конформных отображений, культивировались, с одной стороны, проживавшим в Москве и занимавшим скромную должность учителя гимназии выдающимся латышским геометром Карлом Михайловичем Петерсоном, а, с другой стороны, были связаны с замечательными работами великих московских механиков: Николая Егоровича Жуковского и его ученика Сергея Алексеевича Чаплыгина. Деятельность этих ученых была тесно связана с основанным в середине 1860-х годов Московским математическим обществом, служившим во все последние десятилетия прошлого и ний и поверхностей (например, цилиндрические, конические, винтовые поверхности), измерение длин линий, площадей областей и углов на кривых поверхностях, а также свойства поверхностей, не изменяющиеся при тех или иных отображениях. Важным разделом дифференциальной геометрии является теория геодезических линий на поверхностях, то есть кратчайших линий, соединяющих две точки поверхности (на плоскости — это отрезок прямой, на сфере — дуга большого круга). В работах Московской дифференциально - геометрической школы изучались, в частности, изгибания поверхностей, то есть отображения, не изменяющие длин линий на них. По существу вы имели дело с дифференциальной геометрией, когда занимались в 9-м классе проведением касательных к графику функции.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ — уравнения, содержащие производные от искомых функций. Если эти функции зависят от одного аргумента, дифференциальные уравнения называют *обыкновенными*, а если от нескольких — *уравнениями в частных производных*, эти последние часто называют *уравнениями математической физики*.

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ — отображения поверхности на поверхность, сохраняющие углы между линиями. Пример — преобразования подобия, которые вы изучали в геометрии. Еще пример — *стереографическая проекция* сферы на плоскость (проекция, при которой сфера проектируется из северного полюса на плоскость, касающуюся ее в южном полюсе). Конформные отображения играют важную роль в картографии, гидромеханике, аэромеханике и других областях науки.

первые десятилетия текущего столетия основной научно-общественной базой Московской математической школы.

Дифференциальной геометрии принадлежали на рубеже прошлого и нынешнего столетий и математические интересы Б. К. Млодзеевского и Д. Ф. Егорова, бывших в ту пору наиболее популярными профессорами-математиками в Московском университете. Фундаментальное участие Д. Ф. Егорова в создании московской школы теории функций относится к 1911—1913 годам, когда он доказал (1911) свою знаменитую теорему о последовательностях измеримых функций и поставил в связи с этой теоремой перед своим лучшим учеником Н. Н. Лузиным задачу доказательства одной из основных теорем развивающейся в то время теории функций. То отношение, которое к созданию Московской школы теории функций имел Б. К. Млодзеевский, конечно, не может быть даже сравниваемо с основополагающим участием Д. Ф. Егорова, но тем не менее должно быть упомянуто: оно заключается в том, что Б. К. Млодзеевский, никогда сам не работавший в этой области, но являвшийся широко образованным математиком, имевшим представление обо всем, что делалось в ней в его время, был первым профессором Московского (и вообще какого-либо русского) университета, прочитавшим в университете курс общей теории функций действительного переменного. Курс этот слушал и Н. Н. Лузин и неоднократно с большим признанием отзывался о нем.

Два самых выдающихся профессора-математика, преподававшие в Московском университете в первой трети текущего столетия: Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин как лекторы и вообще профессора университета принадлежали к двум противоположным типам. Д. Ф. Егоров принадлежал, я бы сказал, к классическому типу, а Н. Н. Лузин — к романтическому. В лекциях Д. Ф. Егорова, всегда безукоризненно тщательно приготовленных, все доказательства были до конца продуманы и изложены в абсолютно строгой форме. В них не было места никаким элементам импровизации, и они соответствовали подготовке и уровню понимания тех слушателей, для которых были предназначены. Внешне Д. Ф. Егоров всегда был крайне сдержан, он не пользовался никакими ораторскими приемами или украшениями и на непривыкшего к его манере изложения слушателя его лекции могли даже производить впечатление несколько суховатых. В действительности в его изложении бывал и настоящий подъем, но подъем этот, как и вся вообще эмоциональная сторона его личности ученого и профессора, был подчинен строго продуманной и даже несколько суровой на вид форме. В противоположность этому Н. Н. Лузин был ярким представителем «романтического» типа профессоро

Д. Ф. Егоров

ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА — множества, обладающие мерой. В конце XIX века французским математиком Анри Лебегом была построена теория меры, позволяющая приписывать меру весьма широкому классу множеств. Мера Лебега является обобщением обычных понятий длины, площади, объема. Оказалось, что «длина» множества рациональных чисел на отрезке [0,1] равна нулю, а длина множества иррациональных чисел на том же отрезке равна 1 («Квант», 1975, № 8). Один из самых общих методов конструирования измеримых множеств был предложен автором данной статьи академиком П. С. Александровым — в те годы начинавшим свои занятия математикой студентом университета.

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ — функции, обладающие тем свойством, что для любых a и b множество точек x, для которых $a \leqslant f(x) < b$, измеримо. Любая непрерывная функция измерима. Примером всюду разрывной, но измеримой функции может служить функция Дирихле, равная нулю во всех иррациональных точках и единице во всех рациональных точках. Если выкинуть из области определения функции Дирихле все рациональ-

университета. Все его преподавание было чрезвычайно эмоционально. Форма этого преподавания далеко не всегда бывала безукоризненной. Н. Н. Лузину случалось приходить на лекцию и плохо подготовленным и тут же, стоя у доски перед студентами, импровизировать еще неготовое доказательство. При этом он часто ошибался, путался в выкладках и откладывал до следующей лекции материал, предназначавшийся для данной лекции, но оказавшийся не подготовленным. Словом, образцовым его преподавание назвать было нельзя. При этом он иногда и несколько кокетничал этой своей «необразцовостью». Но лекции Лузина, в эпоху расцвета его педагогической деятельности в Московском университете, были полны новыми и интересными идеями, способными побудить слушателя к дальнейшим самостоятельным занятиям. Даром увлекать умы и воспламенять сердца Н. Н. Лузин обладал в высшей степени. Естественно, что результаты этого увлечения и воспламенения были различны в зависимости от того горючего материала, на который падали брошенные в него искры вдохновения. Способные молодые начинающие математики, а их было немало среди студентов, слушавших Н. Н. Лузина, побуждались к серьезным и глубоким собственным исследованиям, осуществлявшим дальнейшие продвижения в математической науке. Но были и просто восторженные девицы, восклицавшие, что слушать Лузина лучше, чем слушать Шаляпина, чем и ограничивалось их восприятие математических идей великого учителя.

Не менее важным, чем характер лекций Лузина, побуждавший и, я бы сказал, вдохновлявший слушателей к самостоятельным исследованиям в области математики, был и введенный Лузиным в практику нашего факультета совершенно новый стиль взаимоотношений между профессором и студентами. В нем поражали большая свобода и непринужденность, отсутствие всякой официальности и замена внешних проявлений почтительности со стороны студентов действительно глубоким уважением, часто переходившим в восторженное преклонение. Это уважение и делало невозможным вырождение свободы и непосредственности в отношениях между Н. Н. Лузиным и его студентами в какое-либо панибратство.

Я впервые встретился с Н. Н. Лузиным в 1914 году, будучи студентом 2 курса. Впечатление от этой встречи было, можно прямо сказать, потрясающим и навсегда запомнилось мне. Обратившись к Лузину после окончания его лекций за советом, как мне заниматься математикой дальше, я был прежде всего поражен внимательностью и (не могу найти другого слова) уважением к собеседнику, как ни странно звучит это слово, когда речь идет о беседе уже знаменитого, хотя еще и молодого

В. В. Голубев

ные точки (которых с некоторой точки зрения «меньше», чем иррациональных), то функция Дирихле превратится в константу, т. е. станет непрерывной на сокращенной области определения. Большим достижением анализа явилось понимание того, что разрывные функции, имеющие интерес для анализа, «в основном» непрерывны. Такими и являются функции, «измеримые по Лебегу». В выяснении всех относящихся сюда вопросов большую роль сыграли результаты Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина.

АКСИОМА ЦЕРМЕЛО — использованное итальянским математиком Цермело утверждение, что для любой совокупности попарно не пересекающихся множеств можно построить новое множество, выбрав по одному элементу из каждого множества. Несмотря на свою кажущуюся очевидность, это утверждение (называемое также *аксиомой произвольного выбора*) приводит к весьма парадоксальным результатам (например, к утверждению, что сферу можно разбить на 4 конгруэнтных друг другу множества так, что из двух таких множеств можно получить всю сферу, повернув их относительно центра). Ряд исследований Московской математической школы был посвящен выяснению того, ка

ученого с 18-летним студентом, еще только начинавшим интересоваться математикой. Выслушав меня, Лузин посредством умело поставленных вопросов очень скоро разобрался в характере моих математических склонностей и сразу же в доступной мне форме обрисовал основные направления, которые он мог мне предложить для дальнейших занятий; очень осторожно он сам меня склонил к выбору одного из этих направлений, причем все это сделано было тонко, без всякого нажима и, как я теперь могу сказать, правильно. Я стал тогда же учеником Лузина.

Мое знакомство с Лузиным пришлось довольно точно в середину того десятилетия, в котором он получил самые значительные свои результаты. Он жил тогда совершенно один в меблированных комнатах (Кокоревское подворье на Балчуге), жил только наукой. Мне запомнилась одна его фраза, сказанная в одну из многочисленных наших встреч: «Я дни и ночи думаю над аксиомой Цермело (аксиома произвольного выбора в теории множеств). Если бы только кто-нибудь знал, что это за вещь!».

Видя Лузина в эти годы, я действительно видел то, что может называться вдохновенным отношением к науке, и я не только учился у него математике, но и получил урок того, что такое настоящий ученый, а также и того, каким должен быть профессор университета.

Тогда же я понял, что наука и приобщение к ней новых молодых людей — две стороны одной и той же деятельности — деятельности ученого. Все это осталось мне на всю жизнь. Педагогическая деятельность в Московском университете осуществлялась школой Егорова — Лузина в нескольких направлениях. Д. Ф. Егоров читал обязательные курсы дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. Кроме того, он читал ряд спецкурсов, которые хотя и не были обязательными, но пользовались большой популярностью и посещались большим числом студентов. Курсы Д. Ф. Егорова могли служить и первым введением в только что возникавший тогда функциональный анализ.

Н. Н. Лузин ежегодно читал тот или иной курс теории функций действительного (иногда и комплексного) переменного, меняя его специальную тематику, но доводя изложение каждый раз до вопросов непосредственно интересовавших его самого и составлявших в данной области сегодняшний день науки.

К старшему поколению учеников Д. Ф. Егорова принадлежали кроме Н. Н. Лузина В. В. Голубев, И. И. Привалов и В. В. Степанов, принимавшие активное участие в московской математической жизни, в частности в преподавании в Московском университете. В. В. Голубев и И. И. Привалов вели интенсивную научную работу и читали ряд курсов в направлении,

И. И. Привалов

кие утверждения теории множеств можно получить, не опираясь на аксиому Цермело. В настоящее время доказано, что аксиому Цермело нельзя ни вывести, ни опровергнуть, опираясь на остальные аксиомы теории множеств.

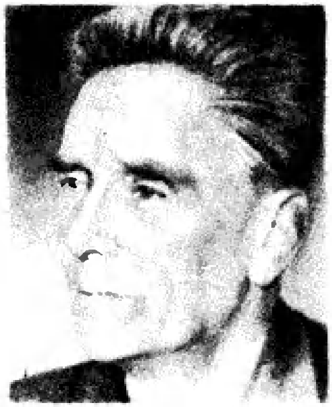
ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — ветвь математики, изучающая задачи на максимум и минимум функций, зависящих от линий, других функций и т. д. (например, отыскание геодезических линий на поверхностях, отыскание линии наименьшей длины, ограничивающей область данной площади и т. д.). Многие принципы физики и механики имеют вариационный характер (например: *свет распространяется так, что время, за которое он проходит от одной точки до другой, минимально*).

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ — ряды, состоящие из гармонических колебаний с кратными частотами:
$A_0 + A_1\cos(\omega x + \alpha_1) + A_2\cos(2\omega x + \alpha_2) + \ldots + A_n\cos(n\omega x + \alpha_n) + \ldots$
Физики часто представляют колебания весьма общего вида как результат наложения друг на друга бесконечного множества гармонических колебаний, то есть как сумму тригонометрического ряда. Такое представление функций используется и при решении многих задач тео-

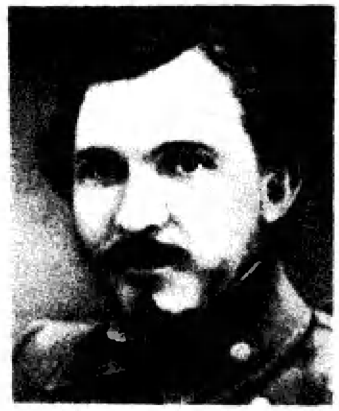
продолжавшем проблематику Н. Н. Лузина. В. В. Степанов, обладавший исключительной широтой математической эрудиции и математических интересов, читал курсы и вел семинары по самым различным вопросам математического анализа в широком смысле слова. Мне, например, запомнился один прослушанный мною с большим интересом курс В. В. Степанова по проблеме Дирихле, очень увлекательный, хотя и прочитанный в строгой манере Д. Ф. Егорова, верным учеником которого был и считал себя В. В. Степанов. Хочу также вспомнить, что первые получившие широкую известность работы А. Н. Колмогорова по теории функций (а именно, по теории тригонометрических рядов) были сделаны им, когда он был участником семинара В. В. Степанова. Упомянув об этом семинаре, я уже забегаю вперед, в первую половину двадцатых годов, когда первоначально единая школа Егорова—Лузина уже дала начало ряду новых школ, разработавших различные области математики и живших самостоятельной жизнью.

В первые годы педагогической деятельности Н. Н. Лузина в Московском университете (а это были годы, непосредственно предшествовавшие революции) в университете работал один-единственный математический семинар. Он имел своим руководителем Д. Ф. Егорова и так и назывался: Математический семинар или, точнее, Математический семинарий. Теперешнее слово «семинар» получило распространение в Московском университете лишь в середине двадцатых годов и было привезено в Москву О. Ю. Шмидтом из Киева, где, по-видимому, было распространено в школе Д. А. Граве. Так вот, Математический семинарий Д. Ф. Егорова происходил каждый год в весеннее полугодие; тема его менялась от года к году. Я впервые принял участие в этом семинаре в 1914 году, будучи еще студентом второго семестра первого курса; считая, что он предназначен для старших курсов, я не сразу и лишь после настойчивой рекомендации В. В. Степанова решил записаться на этот семинар. (Тогда в Университете еще господствовала так называемая предметная система, и каждый студент мог записаться на любой курс или семинар по своему выбору, что было, в частности, связано с платностью обучения и отсутствием государственных стипендий для студентов.) Как я уже говорил, каждый год семинар Д. Ф. Егорова был посвящен одной какой-нибудь теме. В 1914 году темой семинара были «Бесконечные последовательности». Тема разбивалась на несколько подтем, работа над которыми шла параллельно; участники семинара, занимавшиеся данной подтемой, образовывали определенную «группу» семинара. Моя группа называлась «Функциональные последовательности». Мы изучали работы о различных обобщениях понятия равномерной сходимости. Была также и группа, занимающаяся более элементар-

Д. Е. Меньшов



А. Я. Хинчин



М. Я. Суслин

П. С. Александров

П. С. Урысон

Л. А. Люстерник

ретической физики. Докторская диссертация Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» была посвящена изучению многих тончайших вопросов теории тригонометрических рядов с помощью понятий измеримой функции, интеграла Лебега и т. д. Эту тематику продолжали многие ученики Лузина (А. Н. Колмогоров, Д. Е. Меньшов, Н. К. Бари и др.).

ными вопросами: рядами с постоянными членами и различными признаками сходимости этих рядов. Каждая группа несколько раз собиралась на дому у Д. Ф. Егорова. На первом из этих собраний Д. Ф. Егоров распределял литературу между участниками группы, и эта литература докладывалась соответствующими участниками на последующих собраниях группы. Наконец, в заключение работы группы один или два участника группы должны были выступить с докладом уже на пленарном собрании семинара. Так, один доклад был посвящен рядам с постоянными членами, по функциональным рядам было два доклада и т. д. Пленарные собрания семинара Д. Ф. Егорова собирали фактически всех активно работающих математиков Москвы и в этом отношении в некотором роде даже конкурировали с математическим обществом. Эти пленарные собрания проходили всегда очень оживленно. Доклады, делавшиеся на них, в большинстве случаев вызывали интересные высказывания многочисленных слушателей, среди которых особенно активными бывали Н. Н. Лузин и В. В. Степанов, имевшие, впрочем, совершенно различные темпераменты.

М. А. Лаврентьев

Н. К. Бари

А. Н. Колмогоров

Л. Г. Шнирельман

В. В. Степанов

П. С. Новиков

Л. В. Келдыш

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ — последовательности, состоящие из функций (например, 1, x, x^2, ..., x^n, ... или 1, $\sin x$, $\sin 2x$, ..., $\sin nx$, ...). Назовем *расстоянием между функциями* φ *и* ψ *на отрезке* $[a; b]$ наибольшее значение выражения $|\varphi(x)-\psi(x)|$ на этом отрезке. Говорят, что функциональная последовательность

Оживленный, хотя и совершенно «камерный» характер имели и немноголюдные собрания отдельных групп семинара, происходившие, как уже было сказано, на дому у Д. Ф. Егорова. Тон на этих собраниях задавал всегда сам Дмитрий Федорович.

Сформировавшаяся еще в 1914—1916 гг. группа старших учеников Н. Н. Лузина состояла из Д. Е. Меньшова, А. Я. Хинчина, М. Я. Суслина и меня. К 1919—1920 гг. она пополнилась рядом молодых математиков: П. С. Урысон, Л. А. Люстерник, М. А. Лаврентьев, Н. К. Бари, несколько других учеников и учениц Н. Н. Лузина. Так возник очень дружный коллектив, к которому вскоре присоединились два таких выдающихся математика, как А. Н. Колмогоров и Л. Г. Шнирельман. В этот коллектив сразу же включился из математиков несколько более старшего поколения В. В. Степанов. Несколько позже в этот коллектив вошли П. С. Новиков и Л. В. Келдыш. Так возникла знаменитая **Лузитания** — сообщество молодых математиков, спаянных не только тесными дружескими отношениями между его сочленами, но и горячей любовью и живым бескорыстным интересом к математической науке.

Лузитания сразу осознала себя как нечто целое и провозгласила себя «орденом» с «командором» Н. Н. Лузиным и «гроссмейстером» Д. Ф. Его-

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ *равномерно сходится на отрезке* $[a; b]$ к функции φ, если расстояние между φ_n и φ стремится к нулю, когда $n \to \infty$. Рассматриваются и иные виды сходимости функциональных последовательностей, например, *сходимость в среднем*:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\,dx = 0$$

и т. д. В основе определения различных видов сходимости функциональных последовательностей лежат различные способы определения расстояния между функциями.

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. Функции, являющиеся в окрестности любой точки x_0, где они определены, суммами рядов вида

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

(коэффициенты такого ряда выражаются через производные исходной функции в точке x_0), называются *аналитическими функциями*. К их числу относятся изучаемые в школе рациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции, а также почти все функции, встречающиеся в приложениях математики. Разрывные функции и функции, графики которых имеют изломы (например, $y = |x|$ или $y = [x]$), не аналитичны. Замечательно, что две аналитические функции, совпадающие на сколь угодно малом промежутке, равны друг другу всюду. В полной своей красоте теория аналитических функций раскрывается, если рассматривать их не только для действительных, но и для комплексных значений аргумента. Поэтому эта теория называется также *теорией функций комплексной переменной*. Она тесно связана с теорией конформных отображений.

В комплексной области можно выразить значения аналитической функции внутри некоторой области через ее значения на границе области. Однако эти граничные значения могут оказаться не только не аналитической, но даже раз-

ровым. Лузитания была коллективом большого трудового, творческого и эмоционального подъема, отражавшего в «микрокосме» тогдашнего математического факультета Московского университета грандиозный и всеобъемлющий подъем, переживавшийся всей страной в те годы, в первые годы революции, годы становления новой жизни. Об этом особенно хочется вспомнить сейчас, в год шестидесятилетия Великой Октябрьской революции.

Существенным элементом общения Н. Н. Лузина с его учениками были встречи и беседы, которые Н. Н. Лузин имел с совсем небольшими их группами (примерно в 1—3 человека, занимавшимися какой-нибудь темой). Кроме того, был еженедельный общий приемный день для всех учеников Николая Николаевича. Одно время это были четверги, потом среды.

На этих еженедельных собраниях на дому у Н. Н. Лузина кроме непосредственных учеников Н. Н. Лузина часто бывал В. В. Степанов, иногда и И. И. Привалов. Эти вечера у Н. Н. Лузина состояли из двух частей: сначала была математическая часть в кабинете Николая Николаевича, очень уютной комнате, в которой, как, впрочем, и во всей тогдашней квартире Н. Н. Лузина (Арбат, 25, третий этаж), было (по желанию хозяина) керосиновое освещение. Никогда не забуду тех насыщенных самой живой математикой разговоров, которые тогда происходили. Эти разговоры иногда затягивались за полночь, но, когда бы они ни кончались, за ними следовал чай с неизменным очень вкусным ореховым тортом. За этим чаем — уже не в кабинете, а в столовой квартиры Лузиных — разговоры принимали другой, нематематический характер и касались самых различных вопросов культурной и общественной жизни. Иногда что-нибудь читалось вслух. В. В. Степанов с большим увлечением читал стихи Блока, чаще же читались менее серьезные вещи. Так, например, Н. Н. Лузин с большим мастерством и артистичностью читал предназначенные собственно для детей произведения Корнея Чуковского. Я, помню, однажды прочитал рассказ Анатоля Франса «Чудо святого Николая».

Собрания у Н. Н. Лузина кончались глубокой ночью. После их окончания участники большой гурьбой выходили на Арбат и его переулки и постепенно, в различных последовательных комбинациях провожая друг друга, наконец расходились — обычно уже к утру — по своим домам.

Лузитания жила не только дружно, она жила весело, и ещё как весело! Это веселье даже захлестывало «старших», и не только Н. Н. Лузина, но и Д. Ф. Егорова, принимавших, так сказать, полноправное участие в наших оживленных веселых собраниях. Собрания эти были многочисленны и происходили по различным поводам. Встреча Нового года и Татьянин день, именины Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина, дни рождения отдельных лузитанрывной (хотя и измеримой по Лебегу) функцией. Ряд работ Н. Н. Лузина и его учеников (И. И. Привалова и других) посвящен изучению свойств граничных значений аналитических функций.

РАЗМЕРНОСТЬ— число измерений данной фигуры (например, размерность отрезка и окружности равна единице, размерность квадрата, круга и сферы — двум, а размерность куба и шара — трем). После введения в математику множеств весьма общей природы возникла задача общего определения понятия размерности и изучения свойств этого понятия. В окончательном формировании теории размерности основное значение имеют работы П. С. Урысона («Квант», 1974, № 8), а позднее П. С. Александрова. В работах П. С. Александрова и его учеников обнаружены очень тонкие связи между размерностью и другими геометрическими свойствами множеств.

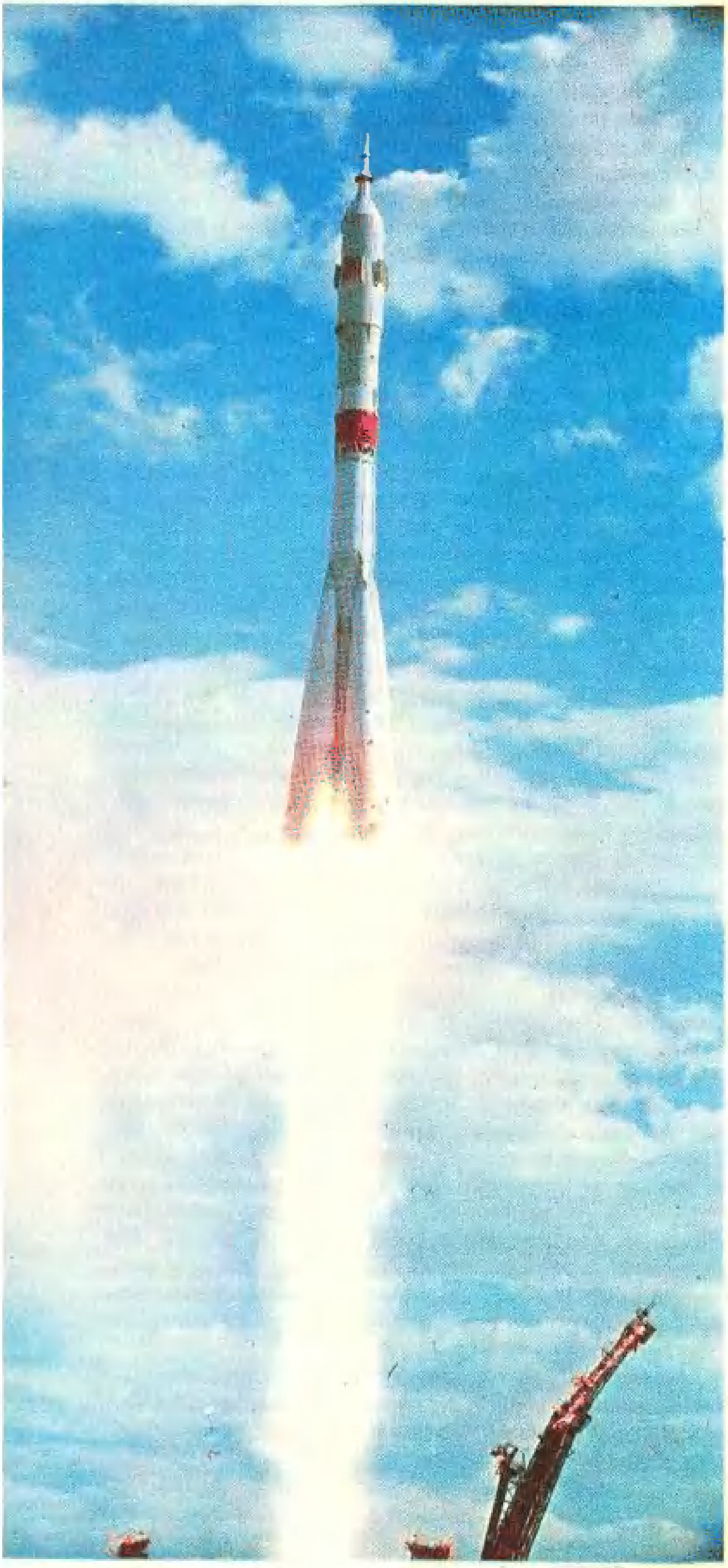
цев — все давало повод для наших встреч, и на них было всегда в высшей степени оживленно и весело и при этом, заметьте, ни на одной из этих встреч не было выпито ни капли вина, пива и вообще какого бы то ни было содержащего алкоголь напитка: это были годы «сухого закона», и он в нашем кругу соблюдался абсолютно. Бывали и бесконечные, многочасовые прогулки — дневные и ночные, как загородные, так и по московским улицам и переулкам, в том числе лодочные прогулки, купанья и так далее до бесконечности. Но не надо думать, что мы только развлекались. Вся Лузитания жила интенсивной и самой рабочей научной жизнью. «Две половины» лузинских вечерних приемов стали широко выполнявшейся традицией и собственно лузитанских собраний и развлечений: в них развлекательная часть чередовалась, а иногда и объединялась с самой серьезной математической частью. Так, например, эскизы впоследствии ставшей знаменитой совместной работы Н. Н. Лузина и И. И. Привалова по функциям комплексной переменной были впервые намечены во время загородного «похода». Вся программа построенной П. С. Урысоном теории размерности была им изложена мне во время затянувшегося на несколько часов купанья в реке Клязьме в деревне Бурково близ Болшева в 1921 году. Эти примеры можно было бы умножать без конца.

Лузинская школа, Лузитания, была единственным в своем роде, неповторимым коллективом молодых, в большинстве своем одаренных и жизнерадостных математиков.

В августе 1924 года этот коллектив пережил тяжелый удар: погиб один из самых талантливых членов Лузитании и вообще один из самых талантливых советских математиков — Павел Самуилович Урысон.

Члены Лузитании восприняли этот удар судьбы как личное горе каждого из них, а Лузитания как целое недолго его пережила. К этому времени в недрах Московской, тогда еще единой, математической школы начался процесс формирования отдельных школ по различным областям математики: по теории функций комплексного переменного, по топологии, по теории вероятностей, по дифференциальным уравнениям и др. Повторяю, школы эти возникали в рамках самой Лузитании, но, раз возникнув, они сразу, как новорожденные киты, зажили самостоятельной жизнью и быстро и успешно росли и развивались.

Лузитания как таковая перестала существовать, превратившись в непроходящее воспоминание каждого из ее участников, слившееся с воспоминанием о его собственной юности.



XX ЛЕТ

4-го октября 1957 года впервые в истории человечества был запущен искусственный спутник Земли. Эта дата является началом космической эры человечества. Мы можем гордиться, что эта эра началась в нашей стране — первый спутник был запущен в Советском Союзе.

Академик С. П. Королев — Главный конструктор первых ракетно-космических систем.

◀Старт космического корабля «Союз».

Первый в мире искусственный спутник Земли.

КОСМИЧЕСКОЙ ЭРЫ

За прошедшие двадцать лет в космосе были проведены многочисленные научные исследования. Достаточно сказать, что только в Советском Союзе запущено свыше тысячи различных аппаратов для исследования космоса.

Освоение космоса идет гигантскими шагами. Нашей стране — родоначвльнице космонавтики — принадлежит приоритет в этапных событиях, связанных с освоением космоса. Советский Союз первым осуществил запуск спутника с человеком на борту — первым в мире космонавтом стал граждвнин Советского Союза коммунист Юрий Алексеевич Гагарин. Первый человек, вышедший в открытое космическое пространство, был граждании Советского Союза коммунист Алексей Архипович Леонов. Советский Союз впервые осуществил запуск многоместных летательных аппаратов, автоматическую стыковку летательных аппаратов на орбите, фотографирование обрвтной стороны Луны, мягкую посадку станции на

Первый космонавт Ю. А. Гагарин.

Первая женщина-космонавт В. В. Николаева-Терешкова.

Космонавт А. А. Леонов — первый человек, совершивший выход в открытый космос.

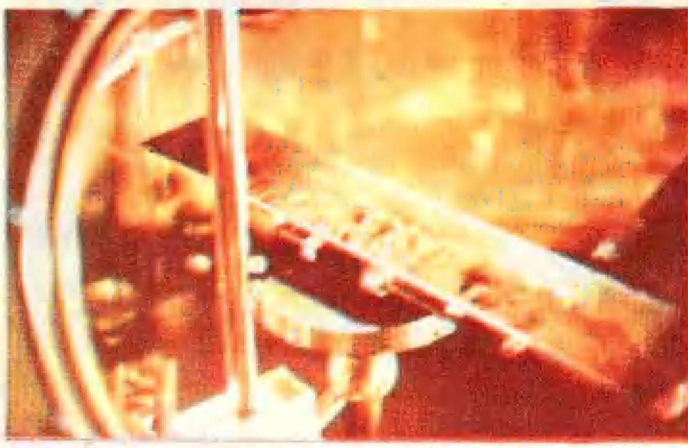
Луне, создание спутников Луны, облет Луны и возвращение космических аппаратов на Землю, доставку на Землю лунного грунта автоматическими станциями, создание самодвижущихся дистанционно - управляемых лунных аппаратов (луноходов), посадку автоматических станций на поверхность Венеры и Марса.

Влияние космонавтики на изучение Вселенной огромно. Космические исследования оказали стимулирующее воздействие на развитие научной и технической мысли, экономики и культуры. Они привели к резкому подъему уровня науки и техники в таких актуальных и передовых областях, как аэродинамика, теплофизика, химическая физика, радиотехника и техника телевидения, техника систем автоматического управления, применение в промышленности электронных машин, проблемы миниатюризации технических конструкций.

В настоящее время космические исследования вступают в новую фазу. Спустя двадцать лет после выхода человека в космос они все больше становятся нормальным видом научно-исследовательской деятельности, а космос — рабочим местом, лабораторией ученых. После первых, можно сказать, рекогносцировочных экспериментов началась эпоха систематических исследований, и грядущие десятилетия, несомненно, будут отмечены еще более крупными достижениями.

Публикацию подготовил М. Смолянский.

Фото ТАСС



Лунный грунт, доставленный станцией «Луна-16».

На месте приземления космического корабля «Союз-19» А. А. Леонов и В. Н. Кубасов с поисковой группой.

«Луноход-1».

В. В. Горбатко и Ю. Н. Глазков во время тренировок.

Экипажи космических кораблей «Союз-19» и «Аполлон».

Автоматическая межпланетная станция «Марс».

В. Большаков

Оптическое зондирование Земли и Луны из космоса

Двадцать лет назад 4 октября 1957 года запуском первого в мире искусственного спутника Земли Советский Союз открыл новую эру в истории человечества — эру завоевания космоса. 20 лет — срок небольшой, а успехи науки и техники в освоении космического пространства грандиозны. И ведущее место в мире здесь по праву принадлежит нашей стране, где последовательно осуществляется научно-обоснованная программа изучения космического пространства, Луны и планет. Эти задачи решаются с помощью автоматических средств (искусственных спутников, космических аппаратов-зондов, автоматических станций) и с помощью пилотируемых космических кораблей «Союз» и орбитальных станций «Салют».

Много новых возможностей перед наукой открыла практическая космонавтика, особенно после успешного решения технической задачи возвращения с космических трасс на Землю автоматических и пилотируемых станций. Одна из таких возможностей — дистанционное зондирование Земли и Луны оптическими средствами, прежде всего, методом фотографирования.

Как известно, возвращение космических аппаратов из дальнего космоса впервые в мире было выполнено в СССР во время полета станции «Зонд-5». Станция облетела Луну и 21 сентября 1968 года вернулась на Землю, совершив мягкую посадку в заданном районе. Тогда же было положено начало практическому использованию метода космического фотографирования: при полете станции с расстояния 90 тыс. км была сфотографирована Земля (рис. 1).

Фотографии, на которых изображена вся Земля или другое космическое тело, принято называть глобальными. Сразу же после получения глобальных фотографий Земли с «Зонда-5» они были использованы, в частности, для изучения закономерностей распределения облачных образований в масштабах всей Земли и сравнения фактических погодных условий с прогнозируемыми, а также для определения размеров Земли. Поскольку Земля фотографировалась непрерывно в течение почти 30 минут, любая точка земной поверхности, расположенная на экваторе, переместилась относительно оптической оси фотоаппарата (вследствие вращения Земли вокруг своей оси) примерно на 800 км (длина экватора $\approx$40 000 км). В результате на снимках, соединенных попарно и разнесенных по времени, получилось объемное (так называемое стереоскопическое) изображение Земли. Это позволило (с помощью измерений на специальных фотограмметрических приборах) определить пространственные координаты дуг произвольных сечений объемного изображения Земли и, зная расстояние от точки фотографирования до центра Земли, вычислить размеры Земли.

Для самой Земли это практически не нужно, так как для нее геодезические методы дают достаточно хорошие результаты. Но это позволило разработать методику определения размеров космических тел по измерениям на глобальных фотографиях и применить эту методику, например, для определения размеров Луны (после фотографирования ее с расстояний около 10 тыс. км межпланетными автоматическими станциями «Зонд-6, 7,8»).

Данная методика подходит и для определения размеров других планет Солнечной системы.

Рис. 1. Освещенная часть земной поверхности ограничена меридианами 60° восточной и 50° западной долготы. Терминатор (граница света и тени на планете) проходит примерно по меридиану 50° западной долготы. На снимке хорошо просматриваются очертания материков и водных поверхностей, не закрытых облачностью: районы Средиземного, Черного, Каспийского и Аральского морей, Аравийский полуостров, Иранское нагорье и большая часть Африки. Значительная часть земной поверхности закрыта облачностью различной структуры — слоисто-кучевой, кучевой, высококучевой, перисто-кучевой и разорванной. В северных широтах земного шара хорошо просматриваются два мощных циклонических образования.

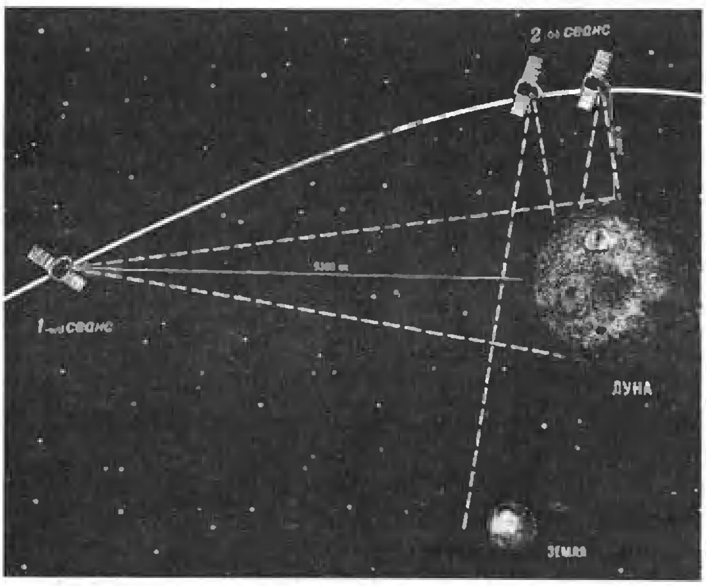


Рис. 2. В первом сеансе фотографирования после ориентации по Солнцу и звездам станция «Зонд-6» была развернута таким образом, что оптическая ось фотоаппарата оказалась направленной на центр Луны, примерно на границу между ее видимой и невидимой с Земли частями, при этом в кадр попал почти весь лунный диск. Второй сеанс фотографирования проводился для получения снимков в возможно более крупном масштабе с целью картографирования невидимой части Луны. При этом в поле зрения попала и Земля. Во время первого сеанса расстояние до Луны составляло 9,3 тыс. км, во время второго — от 3,3 до 2,4 тыс. км и до Земли — 388 тыс. км.

Через два месяца после возвращения станции «Зонд-5» (в ноябре 1968 года) к Луне стартовала советская автоматическая станция «Зонд-6», которая выполнила в соответствии с программой полета два сеанса фотографирования Земли и Луны (рис. 2) и совершила виртуозный спуск на поверхность Земли. В результате полета станции «Зонд-6» впервые в мире были получены и доставлены на Землю снимки обратной стороны Луны, позволившие приступить к составлению топографических карт.

Для автоматических станций «Зонд» характерны высокая точность и совершенство системы ориентации и стабилизации. Так, точность выдерживания оптической оси съемочной камеры в процессе сеанса фотографирования, вычисленная по не-

Рис. 3. Снимок планеты Земля получен с помощью автоматической станции «Зонд-7» с расстояния 78 тыс. км. На снимке хорошо видны территории среднеазиатских республик, Аральское море, озера Балхаш, Иссык-Куль. Отчетливо выделяются горные хребты Памира и Тянь-Шаня. К востоку в просветах между облаками, просматриваются горы Алтая, а далее — озеро Байкал. За границей сплошной облачности, затянувшей весь Кавказ, видны Черное и Азовское моря и Крымский полуостров. Севернее, за грядой облаков, просматриваются очертания Ботнического залива, Карелии и Белого моря. На южной части снимка — территории Ирана, Афганистана, Ирака, Малой Азии и Аравийского полуострова. За Красным морем видны пространства Северной Африки. В момент фотографирования линия терминатора проходила в Атлантическом океане.

совпадению центра диска Земли, изображенного на космическом снимке, с оптическим центром фотоснимка, составляла 30—40 угловых минут.

На борту станций «Зонд» находилась съемочная камера с фокусным расстоянием 400 мм и форматом кадра 13 × 18 см. Она обеспечивала, при полном использовании пленки, получение около двухсот снимков. Доставленная станциями «Зонд-5, 6» фотоинформация по своему качеству значительно превосходит ранее передаваемые телевизионные изображения, снятые с тех же расстояний. Например, в интервале между черным и белым тонами лучшие телевизионные системы передают до 12 тонов различной плотности (градаций). Доставленные станциями фотоснимки позволяют использовать все возможности человеческого глаза — до 60 градаций, а с применением соответствующих приборов — до 100 градаций. Или еще один пример. Фототелевизионная система передает три — пять пар черных и белых штрихов на участке шириной в один миллиметр (так называемая разрешающая способность изображения). Фотографирующая система, установленная на станциях «Зонд», имеет в 10—20 раз большую разрешающую способность, что существенно увеличивает объем полученной информации. При этом значительно уменьшаются и геометрические искажения.

В августе 1969 года и октябре 1970 года состоялись полеты автоматических станций «Зонд-7, 8», во время которых продолжались физические исследования на трассе полета и в окололунном пространстве. Со станции «Зонд-7» впервые были получены цветные фотографии Земли и Луны (рис. 3). Безусловный интерес представляют и черно-белые фотографии (рис. 4).

Какие же научные задачи решались с помощью станций серии «Зонд»?

Это прежде всего наблюдения Луны с близкого расстояния и по направлениям, недоступным для наблюдений с Земли. Искусственные спутники Луны позволяют изучать лунное гравитационное поле. Для

Рис. 4. На черно-белом снимке, полученном при фотографировании с автоматической станции «Зонд-8» с расстояния 9,6 тыс. км, видна та часть поверхности Луны, которая ограничена меридианами 17° (линия терминатора) и 150° западной долготы. Северо-восточную область снимка занимает Океан Бурь. На светлой части фотографии рельефно выделяется Море Восточное с окаймляющими его горами.

Рис. 5. На рисунке показан вид ландшафта обратной стороны Луны и приведены основные характеристики ее фотографирования с автоматической станции «Зонд-8».

привязки гравитационного поля к ориентирам лунной поверхности, изучения ее физической природы, геологических структур и т. п. необходимо знать форму именно физической поверхности. Фотографирование Луны с помощью станций «Зонд» позволило получить изображения как видимой, так и невидимой с Земли частей лунной поверхности. А это даст возможность построить пространственную модель Луны и определить ее фигуру.

Другой целью фотографирования Луны с «Зондов» было детальное изучение лунной поверхности, в частности, топографии обратной стороны Луны (рис. 5), а также изучение отражательных свойств лунной поверхности.

По фотографическим материалам, полученным с автоматических станций «Зонд», впервые составлена топографическая карта обратной стороны Луны. Оказалось, что невидимая сторона нашего спутника по характеру

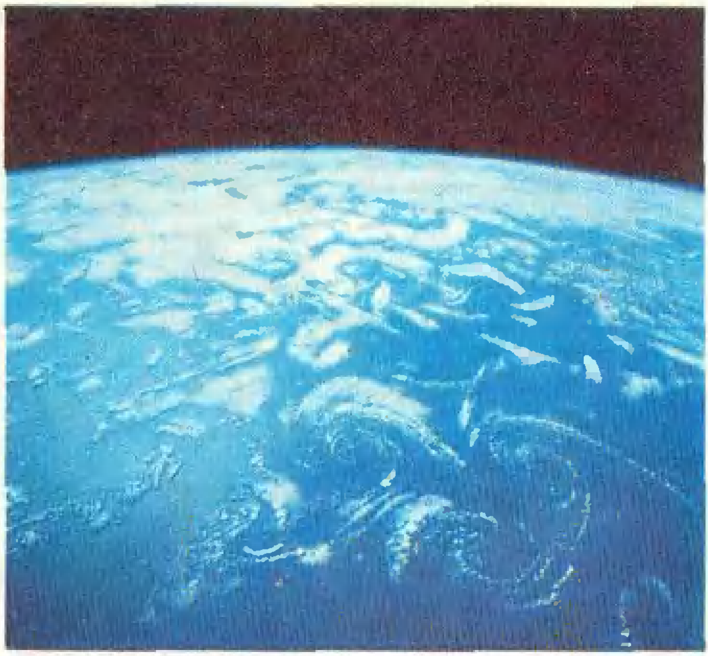


Рис. 6. Снимок акватории восточной части Атлантического океана получен с борта научной орбитальной станции «Салют-3». На первом плане над необозримым пространством океана, сливаясь, закручиваются отдельные спирали слоисто-кучевых облаков. На втором плане до линии горизонта простирается мощный покров облачности с незначительными просветами морской глади. Тон изображения облаков неоднородный: от голубовато-белого до ярко-белого.

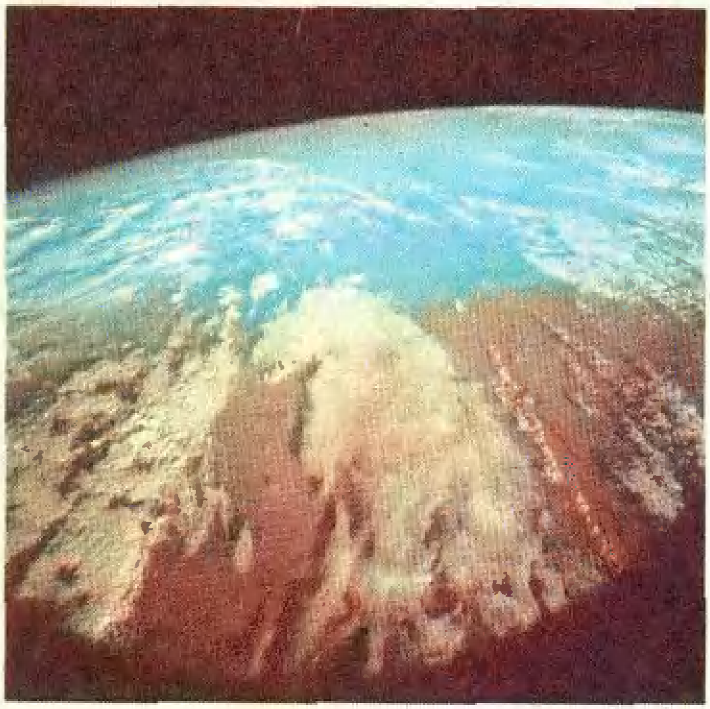


Рис. 7. На космическом снимке Земли, полученном при съемке с орбитальной станции «Салют-3», сквозь слои облачных образований просматривается Прикаспийская низменность, северная и восточная части акватории Каспийского моря, русло реки Волги, ее дельта. К востоку от дельты Волги на фоне сплошного облачного покрова заметно темное пятно — «глаз» циклона (облачность наиболее пониженного давления). Растительный покров в пределах Прикаспийской низменности на снимке можно различить по красным и пурпурным пятнам, водная гладь Каспийского моря имеет голубой тон, облачность — от светло-серого до ярко-белого.

ландшафта совершенно не похожа на ту, которую видели и изучали астрономы. На ней мало морей, все пространство занято кольцевыми образованиями. Это различие в строении двух полушарий Луны еще не нашло исчерпывающего объяснения и стоит перед учеными очередной, ждущей решения, задачей.

К числу научно-прикладных задач экспериментов принадлежит составление более точных карт Луны, необходимых для научных исследований, ориентировки во время полетов в окололунном пространстве и привязки орбит космических аппаратов к физической поверхности Луны.

Непосредственное фотографирование Земли с больших высот тоже позволяет получить ряд важных научных данных. Например, по снимкам земной поверхности можно установить взаимное пространственное положение крупных метеорологических структур (циклонов, антициклонов, облачных образований и т. д.). Снимки Земли из космоса позволяют изучить отражательную способность земной поверхности. Как известно, отражение света от различных веществ происходит по-разному. Это дает возможность при изучении снимков распознавать (дешифрировать) сфотографированные объекты по так называемым коэффициентам яркости. Так, по фотографиям Земли и величинам коэффициентов яркости рек, озер, морей, океанов, материков, лесных массивов и т. д. можно судить: о водных запасах рек, озер и других водных бассейнов; о запасах и сортах лесных массивов; о величине и качестве пастбищ; о геологическом строении и полезных ископаемых; о почве и о том, какие посевы выгоднее производить на ней; о том, где выгоднее и удобнее проложить трассу шоссейной или железной дорог, газопровода, нефтепровода или судоходного канала.

Выдающиеся полеты советских станций серии «Зонд» со всей убедительностью показали, что на современном этапе многие научные проблемы изучения Луны и Земли могут быть решены с помощью автоматических устройств, многократно доказавших свою эффективность. Однако существуют и такие задачи освоения космического пространства, когда участие человека необходимо и оправдано.

Создание длительно действующей в космосе научной лаборатории, посещаемой в орбитальном полете сменными экипажами, позволяет проводить периодические фотосъемки из космоса, которые способствуют решению актуальных научных и практических народнохозяйственных задач. Для выполнения фотографических экспериментов на борту научных орбитальных станций устанавливается специальный комплекс аппаратуры, производящий съемку в различных диапазонах спектра электромагнитных излучений на различные типы пленок с учетом метеорологической обстановки и фактической орбиты (рис. 6 и 7).

Полученные при фотографировании с орбитальных станций «Салют-1, 3, 4, 5» высокоинформативные космические снимки Земли, обработанные на электронных устройствах, принесли разнообразную информацию о состоянии природной среды в различных районах нашей страны.

Так, по материалам космических съемок составлены десятки карт различных районов нашей страны — структурно-геологических, геоморфологических, почвенных, ландшафтных, грунтовых вод и т. д.

В результате гидрологического изучения космических снимков установлено правильное очертание береговой линии озера Зайсан, изменившейся вследствие создания Бухтарминской ГЭС и водохранилища; выявлены неотразившиеся на картах озера в районе Казахского мелкосопочника и водохранилища (Чарвакское и Токтогульское) в районе Западного Тянь-Шаня; по различному типу водной поверхности на цветных снимках определены границы пресных и соленых вод, вод с различным содержанием взвешенных частиц.

Изучение космических снимков геологами позволило получить новые сведения о строении территории Рудного Алтая (установлено его блоковое строение) и проектировать поиски в этом районе месторождений полиметаллов, обнаружить новые перспективные нефтегазоносные районы (Туранская плита и др.), выполнить оценку гидроэнергетических ресурсов Памира, Тянь-Шаня и Кавказа, получить ценную информацию о ландшафте мелководной акватории Черного, Азовского, Аральского морей и озера Балхаш.

В настоящее время фотографии Земли, полученные из космоса, используются все шире и шире в различных областях науки и практики; такой метод изучения Земли получает все большее признание.

В. Майер

Зеленая красная лампа

В замечательной книге У. Брэгга «Мир света. Мир звука» *) описан красивый опыт, демонстрирующий одно любопытное свойство глаза. Опыт этот настолько прост, что каждый из вас без особых затруднений может повторить его у себя дома.

Прибор для постановки опыта (рис. 1) можно собрать из деталей механического конструктора. На алюминиевом основании (*1*) размером 15 × 60 × 110 мм скобой из жести или алюминия закрепите микроэлектродвигатель (*2*). В отверстия двух стоек (*3*) высотой примерно 60 мм вставьте вал (*4*) со шкивом (*5*) внутренним диаметром 15—25 мм. К торцу вала предварительно должен быть прикреплен картонный диск (*6*) диаметром 100—140 мм (если вал с резьбой, диск можно закрепить двумя гайками с шайбами). На основании прибора расположите алюминиевую стойку (*7*) с отверстием для лампочки (*8*). Наденьте на вал микроэлектродвигателя и шкив резиновое кольцо (*9*). Двигатель подключите к одной или двум последовательно соединенным батарейкам карманного фонаря. По рекомендации Брэгга диск должен вращаться со скоростью 2—3 об/с. Скорость вращения диска в некоторых пределах можно регулировать, притормаживая шкив пальцем.

После предварительного испытания подготовьте прибор для опыта. В картонном диске вырежьте сектор с дугой примерно 45° и оклейте одну половину оставшегося сектора белой бумагой, а другую — черной (рис. 2). Стеклянный баллон лампочки карманного фонаря, рассчитанной на напряжение 3,5 В, покройте красной нитроэмалью (можно попробовать использовать лак для ногтей). Когда краска высохнет, вверните лампочку в отверстие стойки прибора и подключите к ее электродам проводники. Перед диском на расстоянии 20—50 см от него расположите настольную лампу так, чтобы свет от нее падал на диск. Подсоедините лампочку к батарейке и включите микроэлектродвигатель.

Если направление вращения диска такое, что при каждом обороте лампочку сначала перекрывает черная часть диска, то при любых освещенностях и скоростях вращения лампочка выглядит красной. Если, поменяв полярность источника питания, изменить направление вращения, то есть заставить крутиться диск так, чтобы лампочку перекрывала сначала его белая часть, то лампочка будет... зеленой или сине-зеленой! Если условия эксперимента (скорость вращения диска, краска, которой покрыта лампочка) подобраны недостаточно хорошо, лампочка выглядит не сине-зеленой, а светло-голубой с белесоватым оттенком.

Попробуем объяснить результат опыта. Диск вращается быстро, и когда прорезь в нем оказывается перед красной лампочкой, на сетчатке глаза на мгновение получается красное изображение лампочки. Если при дальнейшем вращении диска лампочку перекрывает его белая половина, то на сетчатку глаза попадает рассеянный белый свет настольной лампы. Белый цвет действует на сетчатку в течение более длительного промежутка времени, чем красный цвет. После того как перед глазом прокрутится черная половина диска, процесс повторяется. При этом лампочка воспринимается сине-зеленой.

*) У. Брэгг. Мир света. Мир звука. М., «Наука», 1967.

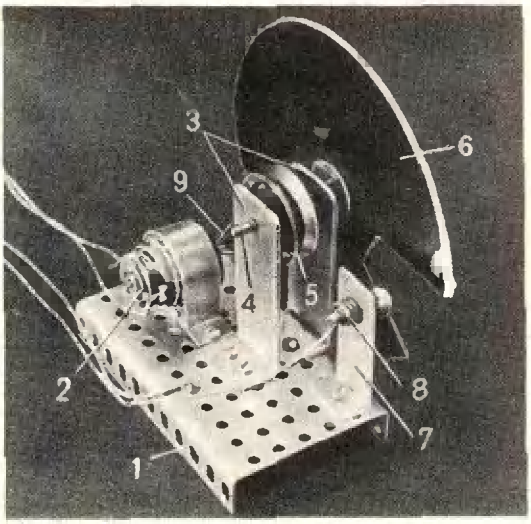


Рис. 1.

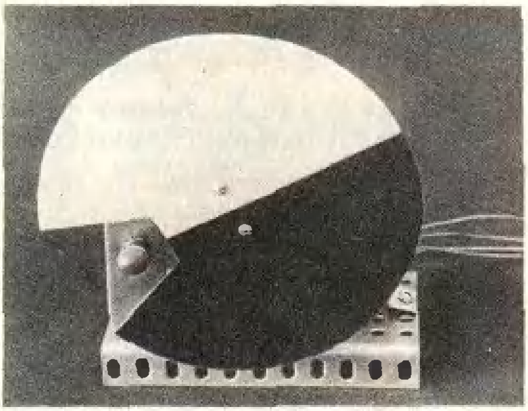


Рис. 2.

Если «смешать» сине-зеленый цвет и красный цвет, то получится белый цвет. Эти цвета называют дополнительными (сине-зеленый цвет дополнителен красному и наоборот). Таким образом, в опыте глаз вместо истинного цвета лампочки воспринимает дополнительный ему цвет.

Можно высказать предположение, что при кратковременном освещении сетчатки красным светом сетчатка в дальнейшем лучше реагирует на все другие спектральные составляющие белого света. Она как бы «утомляется» красным светом, и когда освещается белым светом, то воспринимает его без «красной компоненты», то есть только дополнительный красному — сине-зеленый свет. Поскольку время освещения сетчатки белым светом значительно больше времени освещения красным светом, лампочка выглядит сине-зеленой, а не красной.

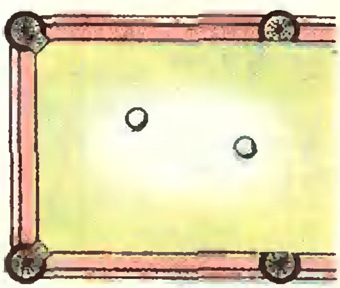
Это предположение подтверждает результат опыта, в котором диск вращается в обратную сторону — так, что лампочку перекрывает сначала его черная половина. Действительно, область сетчатки, где получается красное изображение лампочки, за время, в течение которого перед глазом находится черная часть диска, успевает «отдохнуть». Поэтому, когда перед глазом оказывается белая половина диска, все цвета, входящие в состав белого света, воспринимаются глазом одинаково хорошо. Так как красный свет воздействует на сетчатку более длительное время, чем остальные компоненты белого света (сначала воздействует красная компонента белого света, а затем — красный свет лампочки), то лампочка выглядит красной.

Задачи наших читателей

1. В мокрую погоду при быстрой езде на велосипеде без «крыльев» на спине велосипедиста остается грязная полоса от попавших на нее брызг. Почему?

Г. Барванян (г. Очамчира)

2. При игре в биллиард иногда возникает ситуация, позволяющая загнать одним ударом два шара в разные лузы. Можно ли сделать это при таком положении шаров, которое показано на рисунке?



Ю. Балашов (г. Москва)

3. Тонкая плоско-выпуклая линза, имеющая в воздухе фокусное расстояние F, встроена в стенку аквариума, в который налита жидкость с коэффициентом преломления n. На каком расстоянии от линзы будет собираться параллельный пучок света, падающий на сферическую поверхность линзы?

А. Шведов (г. Запорожье)

А. Егоров

Уравнения и пределы

1. Простой пример

Для приближенного вычисления квадратного корня из положительного числа a поступают следующим образом (см., например, книгу «Алгебра и начала анализа 9», с. 83).

В качестве первого приближения берут произвольное число $a_0 > \sqrt{a}$. Следующее приближение a_1 находят по формуле

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{a}{a_0}\right),$$

по a_1 находят a_2:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{a}{a_1}\right)$$

и вообще

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right).$$

Последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и ограничена. По теореме Вейерштрасса она имеет предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$. Тогда $s > 0$ и $s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a}{s}\right)$, то есть $s^2 = a$, а так как $s > 0$, то $s = \sqrt{a}$.

Если взять достаточно большое n, то a_n будет достаточно мало отличаться от $\sqrt{a}$.

Упражнения

1. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает.

2. Оцените разность $|a_n - \sqrt{a}|$.

Проанализируем наш способ вычисления последовательных приближений для $\sqrt{a}$. Последовательность приближений $\{a_n\}$ задавалась рекуррентно: $a_n = \varphi(a_{n-1})$, где $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Установив сходимость последовательности $\{a_n\}$, мы заключили, что ее предел s удовлетворяет равенству $s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a}{s}\right)$, то есть является корнем уравнения

$$\varphi(x) = x. \qquad (1)$$

На рисунке 1 изображен график функции $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$, $x > 0$, и показаны три первых члена последовательности

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right). \end{cases}$$

Упражнение 3. Выразите a_n через n, если $a_0 = 1$ и а) $a_n = a \cdot a_{n-1}$; б) $a_n = a^{a_{n-1}}$; в) $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$; г) $a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{1 + a_{n-1}^2}}$; д*) $a_n = \frac{1}{1 + a_{n-1}}$.

2. Уравнения и пределы

Пусть нам нужно решить уравнение (1), где φ — некоторая функция. Возьмем произвольное число $a_0 \in D(\varphi)$ и определим рекуррентно последовательность $\{a_n\}$: $a_n = \varphi(a_{n-1})$. Предположим, что $a_n \in D(\varphi)$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

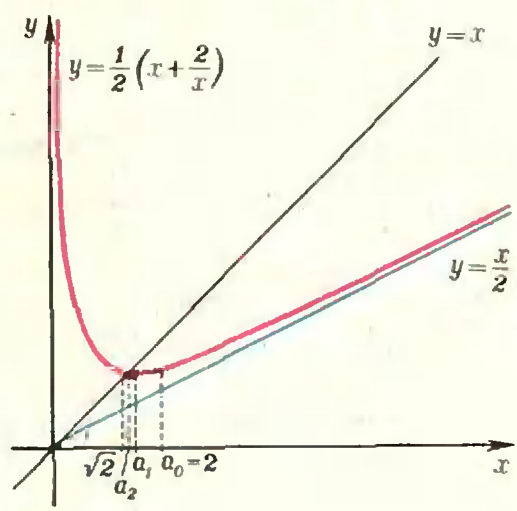


Рис. 1.

Теорема 1. *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к s и функция φ непрерывна при $x=s$, то s является корнем уравнения* (1).

Эта теорема и была фактически применена в п. 1. Выбор первого приближения (или «нулевого члена» последовательности) диктуется соображениями удобства — a_0 естественно брать поближе к искомому корню.

Как будет видно из дальнейшего, умение исследовать разрешимость уравнения (1) позволяет иногда решить вопрос о сходимости соответствующей последовательности $\{a_n\}$.

Упражнения

4. Исследуйте сходимость последовательностей:

а) $a_n=\sqrt{a+a_{n-1}},\ a_0=0;$

б) $a_n=\sin a_{n-1},\ a_0=a\in\ ]0;\ \pi[;$

в) $a_n=\dfrac{1}{1+a_{n-1}},\ a_0=1.$

5. Укажите способ нахождения положительного корня уравнения

$$x^3-x-1=0. \qquad (!)$$

6. (Способ приближенного вычисления $\sqrt[3]{a}$.) Последовательность $\{a_n\}$ строится по следующему правилу:

$$\begin{cases} a_0=a>0, \\ a_n=\dfrac{1}{3}\left(2a_{n-1}+\dfrac{a}{a_{n-1}^2}\right). \end{cases}$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt[3]{a}$.

7. Пусть $a>0$, $b>0$, $p>0$, $q>0$. Рассмотрим последовательность

$$\frac{a}{b},\ \frac{b}{pa+qb},\ \frac{pa+qb}{pb+q(pa+qb)},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n},\ \ldots,$$

где $a_{n+1}=b_n$, $b_{n+1}=pa_n+qb_n$. Существует ли у этой последовательности предел? (Эту задачу предложил наш читатель *В. Фищук*.)

3. Главный пример

Остальная часть статьи посвящена вопросу о сходимости последовательности

$$\begin{cases} \alpha_0=1, \\ \alpha_n=a^{\alpha_{n-1}}, \end{cases} \qquad (2)$$

то есть $1,\ a,\ a^a,\ a^{a^a},\ a^{a^{a^a}},\ \ldots$. Эта сходимость зависит, конечно, от параметра a.

Оказывается, для больших a выяснить существование предела сравнительно легко, а для маленьких —

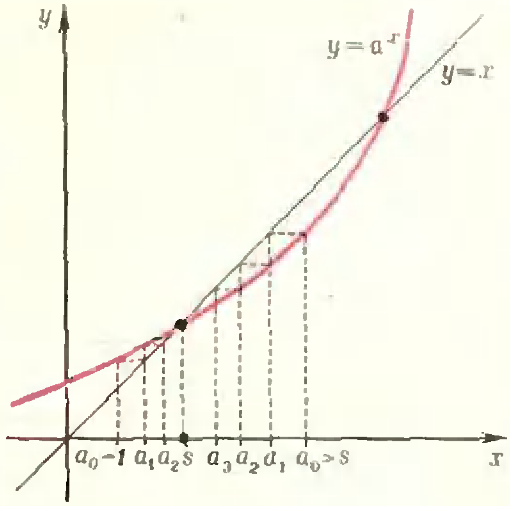


Рис. 2.

гораздо труднее. Приведем несколько примеров.

При $a=2$ получаем последовательность

$$1;\ 2;\ 4;\ 16;\ 65536;\ \ldots$$

(она, очевидно, расходится).

При $a=1{,}5$ — последовательность

$$1;\ 1{,}5;\ 2{,}106;\ 2{,}349;\ 2{,}592;\ \ldots;$$
$$\alpha_{11}\approx 10{,}99;\quad \alpha_{12}\approx 86{,}163;$$
$$\alpha_{13}>10^{16}$$

(она тоже расходится, но здесь с самого начала это далеко не так очевидно).

При $a=\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$ — последовательность

$$1;\ \sqrt{2};\ 1{,}632;\ 1{,}761;\ \ldots;$$
$$\alpha_8\approx 1{,}966;\ \alpha_{25}\approx 1{,}9999$$

(тут, как мы увидим, предел существует и равен 2).

При $a=1$

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots$$

(предел, очевидно, существует и равен 1).

При $a=0{,}5$

$$1;\ 0{,}5;\ 0{,}707;\ 0{,}613;\ 0{,}654;\ \ldots;$$
$$\alpha_{12}\approx 0{,}641206;\ \alpha_{13}\approx 0{,}641177.$$

При $a=0{,}01$

$$1;\ 0{,}01;\ 0{,}955;\ 0{,}0123;\ 0{,}945;\ 0{,}013;\ \ldots;$$
$$\alpha_{15}\approx 0{,}013;\quad \alpha_{18}\approx 0{,}941$$

(поведение двух последних последовательностей мы прокомментируем в конце статьи).

Из теоремы 1 мы знаем, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=s$, то s является корнем

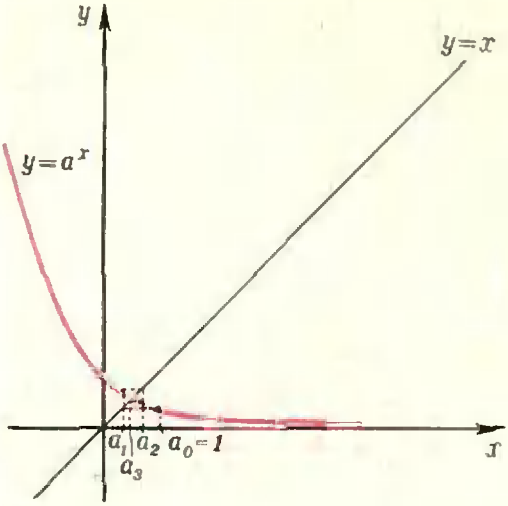


Рис. 3.

уравнения

$$a^x = x \qquad (3)$$

(функция $x \to a^x$ непрерывна во всех точках числовой прямой). Следовательно, если уравнение (3) при некотором a не имеет корней, то соответствующая последовательность (2) расходится.

На рисунке 2 изображен график функции $y = a^x$ и первые члены последовательности (2) — при $a > 1$ и предположении, что уравнение (3) имеет корни; на рисунке 3 — то же при $0 < a < 1$.

4. a>1

При $a > 1$ последовательность (2) монотонно возрастает (проверьте!).

Теорема 2. *При $a > 1$ последовательность (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение (3) имеет хотя бы один корень. В этом случае ее предел равен меньшему из корней уравнения (3).*

Доказательство. Мы только что отмечали, что если последовательность (2) сходится, то ее предел является корнем уравнения (3). Пусть теперь уравнение (3) имеет корни. Обозначим через s_0 наименьший корень. Покажем, что $\alpha_n < s_0$ при всех $n \in \mathbf{N}$. Легко видеть, что $s_0 > 1 = \alpha_0$. Если же $s_0 > \alpha_n$, то $s_0 = a^{s_0} > a^{\alpha_n} = \alpha_{n+1}$. Из теоремы Вейерштрасса следует, что последовательность (2) сходится, причем, очевидно, к s_0. Теорема доказана.

5. 0<a<1

В этом случае последовательность (2) ограничена: $0 < \alpha_n < 1$. К сожалению, она не монотонна. В самом деле, поскольку $0 < a < 1$, функция $y = a^x$ убывает, и $\alpha_2 = a^a < 1 = \alpha_0$, следовательно, $\alpha_3 = a^{a^a} > a^1 = a$, то есть $\alpha_3 > \alpha_1$. Далее, $\alpha_4 = a^{\alpha_3} < a^{\alpha_1} = \alpha_2$, то есть $1 = \alpha_0 > \alpha_2 > \alpha_4$. Пользуясь методом математической индукции, легко доказать, что подпоследовательность $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots, \alpha_{2n-1}, \ldots$ нашей последовательности монотонно возрастает, а подпоследовательность $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n}, \ldots$ монотонно убывает. При этом всегда $\alpha_{2n} > \alpha_{2n-1}$. По теореме Вейерштрасса каждая из этих подпоследовательностей имеет предел. Пусть $\lim_{n\to\infty} \alpha_{2n-1} = s_1$ и $\lim_{n\to\infty} \alpha_{2n} = s_2$. Ясно, что $s_2 \geq s_1$ и последовательность (2) будет сходящейся в том и только в том случае, когда $s_1 = s_2$ (докажите это!).

Что можно сказать про числа s_1 и s_2? Поскольку $\alpha_{2n+2} = a^{a^{\alpha_{2n}}}$, $\alpha_{2n+1} = a^{a^{\alpha_{2n-1}}}$ и функция $x \to a^{a^x}$ непрерывна во всех точках числовой прямой, числа s_1 и s_2 являются корнями уравнения

$$a^{a^x} = x. \qquad (4)$$

Теорема 3. *Числа s_1 и s_2 являются, соответственно, меньшим и большим корнями уравнения (4).*

Доказательство. Пусть s — произвольный корень уравнения (4). Для доказательства теоремы достаточно установить, что $\alpha_{2n-1} < s < \alpha_{2n}$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Прежде всего заметим, что $s < 1$. В самом деле, если $s \geq 1$, то, ввиду $a^s > 0$, $a^{a^s} < 1$, то есть $a^{a^s} \neq s$. Кроме того, очевидно, $s > 0$. Из $0 < s < 1$ следует $a^0 > a^s > a^1$, то есть $\alpha_0 > a^s > \alpha_1$. Значит, $a^{\alpha_0} < a^{a^s} < a^{\alpha_1}$, то есть $\alpha_1 < s < \alpha_2$. Индукционный шаг проделывается аналогично.

Следствие 1. *Если уравнение (4) имеет более одного корня, то последовательность (2) расходится.*

Следствие 2. *Если уравнение (4) имеет ровно один корень, то последовательность (2) сходится, и предел*

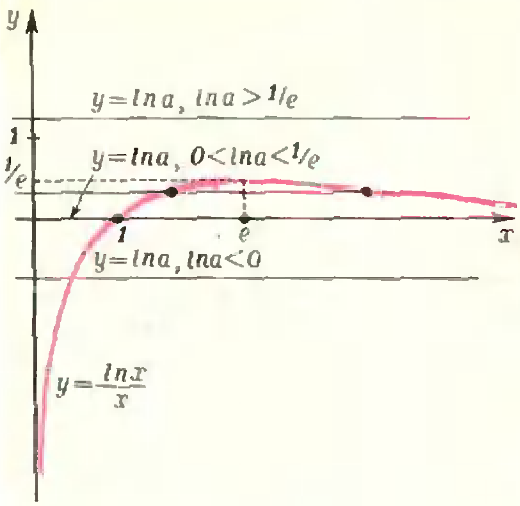


Рис. 4.

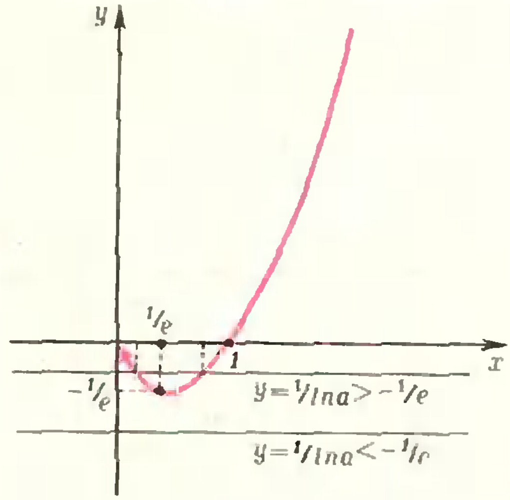


Рис. 5.

этой последовательности есть корень уравнения (3).

Легко видеть, что всякий корень уравнения (3) удовлетворяет также и уравнению (4). Но при $0<a<1$ уравнение (3), очевидно, имеет корень (нарисуйте графики!). Значит, при таких a и уравнение (4) обязательно имеет хотя бы один корень.

Упражнение 8. Рассмотрим последовательность $\alpha_0 = x > 0$, $\alpha_n = a^{\alpha_{n-1}}$. При каких x эта последовательность сходится? (Рассмотрите отдельно случаи $a > 1$ и $0 < a < 1$.)

Итак, вопрос о сходимости последовательности (2) сводится к вопросу о числе корней уравнения (3) при $a>1$ и уравнения (4) — при $0<a<1$.

6. Исследование уравнения (3) при a>1

Уравнение (3) равносильно уравнению

$$\frac{\ln x}{x} = \ln a. \qquad (5)$$

Построим график функции $y = \frac{\ln x}{x}$ (рис. 4). Эта функция определена при $x>0$, достигает максимума, равного $1/e$, при $x = e$, убывает при $x > e$ и возрастает при $0<x<e$.

Упражнение 9. Проведите подробное исследование функции $y = \frac{\ln x}{x}$.

Следовательно, при $\ln a > 1/e$, то есть $a > e^{1/e}$, уравнение (5) корней не имеет.

При $0 < \ln a < 1/e$, то есть $1 < a < e^{1/e}$, уравнение (5) имеет два корня.

При $a = e^{1/e}$ оно имеет один корень.

Заметим для дальнейшего, что при $\ln a \leqslant 0$, то есть $0 < a \leqslant 1$, уравнение (5) имеет единственный корень.

7. Исследование уравнения (4) при 0<a<1

Мы уже знаем, что все корни уравнения (4) заключены в интервале $]0; 1[$. Уравнение (4) равносильно уравнениям $a^x = \log_a x$, $x = \log_a \log_a x$ или $x = \frac{1}{\ln a} \ln \frac{\ln x}{\ln a}$. Обозначим через φ функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{\ln a} \ln \frac{\ln x}{\ln a} - x.$$

Мы хотим выяснить, сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение $\varphi(x) = 0$, равносильное уравнению (4). Чтобы это сделать, нужно посчитать, сколько существует точек пересечения графика функции φ с осью абсцисс.

Прежде всего заметим, что к этим точкам пересечения заведомо принадлежит точка s_0, где s_0 — единственный корень уравнений (3), (5),— см. замечания в конце пп. 6 и 5.

Исследуем функцию φ.

Так как $\ln a < 0$, функция φ определена при $0 < x < 1$. При $x \to 0$ (справа) $\varphi(x) \to -\infty$; при $x \to 1$ (слева) $\varphi(x) \to +\infty$.

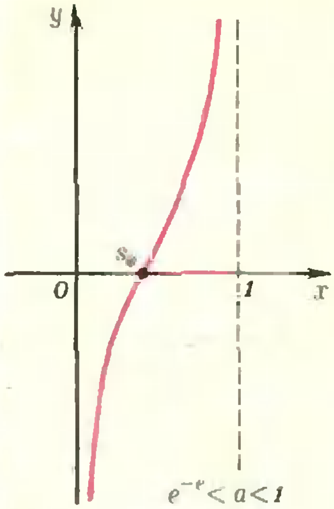


Рис. 6.

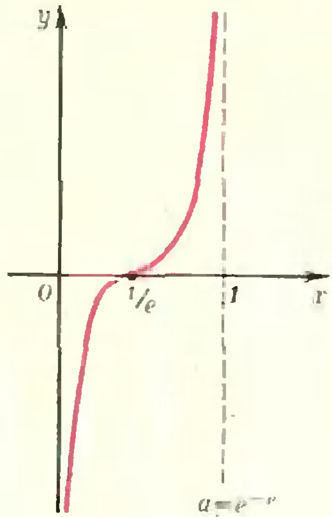


Рис. 7.

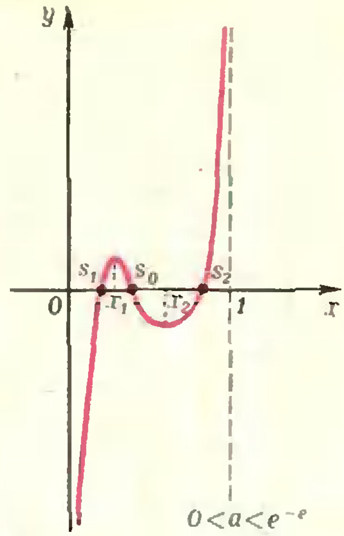


Рис. 8.

Найдем экстремумы функции φ; для этого исследуем ее производную:

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x\ln x\ln a}-1.$$

Приравняв ее к нулю, мы получим уравнение

$$x\ln x=\frac{1}{\ln a}. \qquad (6)$$

На рисунке 5 изображен график функции $y=x\ln x$.

Упражнение 10. *Исследуйте функцию $y=x\ln x$ и постройте ее график.*

Мы видим, что при $x=1/e$ функция $y=x\ln x$ достигает минимума, равного $-1/e$. Поэтому, если $1/\ln a<-1/e$, то есть $\ln a>-e$ или $a>e^{-e}$, то уравнение (6) корней не имеет. Так что при $e^{-e}<a<1$ производная функции φ строго больше нуля, то есть при таких значениях a функция φ строго возрастает. Значит, уравнение $\varphi(x)=0$ при $e^{-e}<a<1$ имеет единственный корень s_0 (примерный график функции φ для $e^{-e}<a<1$ изображен на рисунке 6).

Если $a=e^{-e}$, то $\varphi'(x)=0$ при $x=1/e$ и $\varphi'(x)>0$ при всех остальных $x\in\,]0;\,1/e[\,\cup\,]1/e;\,1[$.

В этом случае φ тоже строго возрастает во всей области определения, и уравнение $\varphi(x)=0$ по-прежнему имеет единственный корень $x=1/e$ (график функции φ для $a=e^{-e}$ изображен на рисунке 7).

Итак, если $e^{-e}\leqslant a<1$, уравнение (4) имеет ровно один корень.

Если же $0<a<e^{-e}$, то уравнение (6) имеет два корня: x_1 и x_2 (рис. 5). Причем при $x\in\,]0;\,x_1[\,\cup\,]x_2;\,1[$ производная $\varphi'(x)$ положительна, а при $x\in\,]x_1;\,x_2[$ — отрицательна, так что x_1—точка максимума, а x_2 — точка минимума функции φ; значит, φ при $x\in\,]0;\,x_1[$ возрастает и при $x\in\,]x_2;\,1[$ возрастает, а при $x\in\,]x_1;\,x_2[$ убывает (разберитесь в этом!).

Покажем теперь, что $s_0\in\,]x_1;\,x_2[$. Для этого достаточно доказать, что $\varphi'(s_0)<0$. Имеем

$$\varphi'(s_0)=\frac{1}{s_0\ln s_0\ln a}-1=\frac{1}{(\ln s_0)^2}-1$$

(так как $\dfrac{\ln s_0}{s_0}=\ln a$). Докажем, что $\ln s_0<-1$ (тогда $\varphi'(s_0)<0$). Для этого обратимся вновь к функции $y=\dfrac{\ln x}{x}$ (рис. 4). Поскольку она при $0<x<1$ возрастает, а $\ln a<-e$, корень s_0 уравнения (5) лежит левее корня уравнения $\dfrac{\ln x}{x}=-e$, то есть левее точки e^{-1}. Значит, $s_0<1/e$ и $\ln s_0<-1$.

Итак, про функцию φ нам теперь известно, что

1) $\varphi(x)\to-\infty$ при $x\to 0$;
2) $\varphi(x)\to+\infty$ при $x\to 1$;
3) φ возрастает на промежутке $]0;\,x_1[$, в точке x_1 имеет максимум, убывает на промежутке $]x_1;\,x_2[$, в точке x_2 имеет минимум и снова возрастает на промежутке $]x_2;\,1[$;

4) φ обращается в нуль в точке s_0 промежутка $]x_1;\ x_2[$. Этих сведений достаточно, чтобы нарисовать примерный график функции φ для $0 < a < e^{-e}$; мы видим, что он пересекает ось абсцисс, кроме точки s_0, еще в двух точках s_1 и s_2 (рис. 8), так что в случае $0 < a < e^{-e}$ уравнение $\varphi(x) = 0$, а следовательно, и уравнение (4) имеет три корня: $s_1 < < s_0 < s_2$.

Вопрос об уравнении $a^x = \log_a x$ в «Кванте» уже обсуждался. В частности, разбиралось уравнение $(1/16)^x = \log_{1/16} x$. Из нашего исследования следует, что у этого уравнения ровно три корня. Два из них легко найти подбором: $x_1 = 1/4$ и $x_2 = 1/2$.

Упражнение 11. Исследуйте разрешимость уравнений в зависимости от параметра a:

1) $x^3 - 3x^2 + a = 0$; 2) $x^4 - ax + 1 = 0$; 3) $a^x = x^2$; 4) $a^x = 2x + 1$; 5) $\cos x \times \cos 3x = a$, $x \in]0;\ \pi[$.

8. Подведем итог

Теорема 4. *Последовательность (2) сходится тогда и только тогда, когда*

$$(1/e)^e \leqslant a \leqslant e^{1/e}$$

$[(1/e)^e = 0{,}065988\ \ldots;\ e^{1/e} = 1{,}444668\ \ldots;$ случай $a = 1$ очевиден$]$.

Возвращаясь к последовательностям, с которых мы начинали п. 3 (см. с. 35), мы можем теперь сказать:

при $a = 2$; 1,5 и 0,01 последовательность (2) расходится;

при $a = \sqrt{2}$ и 0,5 последовательность (2) сходится.

* * *

Ниже мы публикуем несколько необычных «уравнений» с выражениями $f_\infty(x)$, содержащими бесконечное число операций. Прежде чем их решать, надо разобраться, как понимать такие выражения. Об этом рассказано в статьях А. Егорова и Г. Дорофеева, Н. Розова (см. с. 34 и с. 60 этого номера): такое $f_\infty(x)$ нужно понимать как предел при $n \to \infty$ выражения $f_n(x)$, в котором наша операция встречается n раз. В каждой из предлагаемых задач требуется провести целое исследование: аккуратно определить, о каком именно выражении идет речь, затем найти все «подозрительные» x и доказать существование предела.

1. $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = 1$.

2. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\ldots}}}} = 3$.

3. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}} = 2$.

4. $\log_2(3^x + \log_2(3^x + \log_2(3^x \ldots))) = 5$.

5. $\sqrt{2 + x\sqrt{2 + x\sqrt{2 + \ldots}}} = 14$.

6. $(x+1)^{(x+1)^{(x+1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$.

7. $\sqrt{3^x + \sqrt{3^x + \sqrt{3^x + \ldots}}} = 6$.

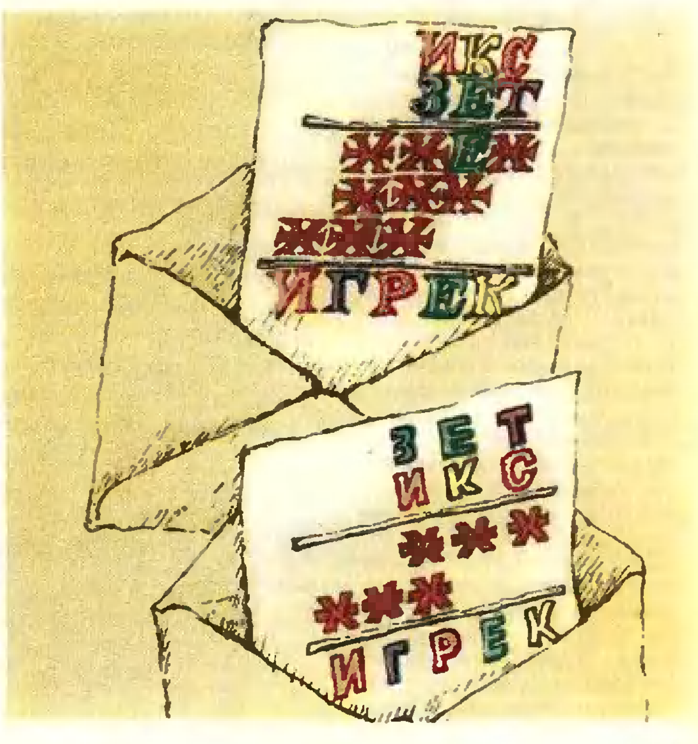
Н. Федин

Вот это близнецы!

Семья математических задач-близнецов пополнилась еще одной поистине фантастической парой. Почему фантастической?

Во-первых, потому, что у этих «близнецов» разные родители. Одного нам «подкинул» Э. Рекстин из Риги (первое письмо), другого — В. Чайковский из Бердянска. В каждом примере одинаковые цифры зашифрованы одинаковыми буквами, разные цифры — разными буквами, звездочка может быть любой цифрой. Каждый пример расшифровывается единственным образом.

Во-вторых, эти близнецы... впрочем, расшифруйте их и посмотрите, что получится.



задачник Кванта

Задачи

М466—М470; Ф478—Ф482

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 декабря 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М466, М467» или «Ф478». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). В начале каждого письма просим указывать ваши имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь. Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу.

М466. Среди 1977 монет 50 фальшивых. Каждая фальшивая монета отличается от настоящей на 1 г (в ту или другую сторону). Имеются чашечные весы со стрелкой, показывающей разность масс одной и другой чашки. За одно взвешивание про одну выбранную монету нужно узнать, фальшивая она или настоящая. Как это сделать?

С. Фомин

М467. Точки D и E делят стороны AC и AB правильного треугольника ABC в отношениях $|AD|:|DC| = |BE|:|EA| = 1:2$. Прямые BD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что угол AOC — прямой.

А. Краснодемская

М468. Точки A, B, C и D плоскости таковы, что для любой точки M этой плоскости скалярные произведения векторов $\vec{MA}\cdot\vec{MB}$ и $\vec{MC}\cdot\vec{MD}$ не равны друг другу. Докажите, что $\vec{AC} = \vec{DB}$. Верно ли обратное утверждение?

Ю. Ионин

М469. а) Уравнение $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ имеет четыре различных вещественных корня. Докажите, что $ab < 0$.

б*) Уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{k-1}x^{n-k+1} + a_{k+1}x^{n-k-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет n различных вещественных корней. Докажите, что $a_{k-1}a_{k+1} < 0$.

В. Вавилов

М470*. Докажите равенства

$$а)\ \frac{1}{C_n^0} - \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^2} - \ldots + \frac{(-1)^k}{C_n^k} + \ldots + \frac{(-1)^n}{C_n^n} = \frac{(n+1)(1+(-1)^n)}{n+2};$$

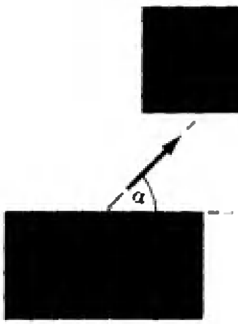


Рис. 1.

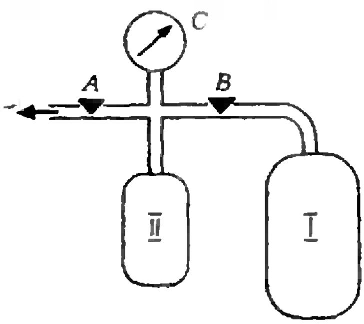


Рис. 2.

б) $$\frac{1}{C_n^1}+\frac{1}{C_n^2}+\frac{1}{C_n^3}+\ldots+\frac{1}{C_n^n}=$$
$$=\frac{n+1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}\right).$$

Л. Курляндчик, А. Лисицкий

Ф478. На кубик, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, налетает точно такой же кубик, причем кубики сталкиваются своими параллельными гранями. Скорость налетающего кубика до столкновения была направлена под углом α к боковым граням (рис. 1). Как будут двигаться кубики после столкновения, если коэффициент трения между гранями кубиков равен μ?

Ф479. Для определения неизвестного объема V_1 баллона I собирают схему, приведенную на рисунке 2. Объем баллона II равен V_2 и $V_2 \ll V_1$.

Сначала систему откачивают до давления p_0, близкого к нулю. Затем закрывают кран B и заполняют баллон I газом до давления p_a. После этого закрывают кран A, открывают кран B и измеряют установившееся в системе давление p_1 манометром C. Затем при закрытом кране B вновь наполняют баллон газом до давления p_a, открывают кран B и измеряют установившееся в системе давление p_2. Эту операцию повторяют n раз. Покажите, что отношение $\frac{p_n-p_0}{np_a}$ есть величина постоянная и равная $\frac{V_2}{V_1+V_2}$.

А. Митрофанов

Ф480. Корабль приводится в движение водометным двигателем, выбрасывающим с кормы струю воды со скоростью $\vec{u}$. Ежесекундно выбрасывается масса воды μ, которая берется из реки. При каком значении скорости корабля к. п. д. двигателя максимален? Силой трения и сопротивлением воды пренебречь.

Ф481. В старой аккумуляторной батарее, состоящей из n последовательно соединенных аккумуляторов, резко возросло внутреннее сопротивление одного из аккумуляторов и стало равным $\rho = 10\,r$, где r — внутреннее сопротивление нормального аккумулятора. Считая э. д. с. всех аккумуляторов одинаковыми, определить, при каких сопротивлениях нагрузки R мощность, выделяемая на нагрузке, не изменится при коротком замыкании поврежденного аккумулятора.

Ф482. Капля воды равномерно падает в воздухе. На сколько отличается радиус кривизны R_1 поверхности капли в ее верхней точке от радиуса кривизны R_2 в нижней точке, если расстояние между этими точками равно $d = 2\cdot10^{-3}$ м? Коэффициент поверхностного натяжения воды равен $\sigma = 7\times\times10^{-2}$ Н/м.

Решения задач

М426—М430; Ф438—Ф441

М426. Таблица из $n \times n$ клеток заполнена числами от 1 до n так, как показано на рисунке 1. При каком n в ней можно выбрать n клеток так, чтобы никакие две клетки не принадлежали одной строке или одному столбцу и чтобы все числа в выбранных клетках были разные?

1	2	3	4		...			n−1	n
2	3	4		...			n−1	n	1
3	4		...			n−1	n	1	2
4		...			n−1	n	1	2	3
	...			n−1	n	1	...		
...			n−1	n	1	...			
...		n−1	n	1	...				
n−2	n−1	n	1	...					
n−1	n	1	...						n−2
n	1	...						n−2	n−1

Рис. 1.

Легко видеть, что если n — нечетное, то условию задачи удовлетворяют клетки диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний угол таблицы (в этих клетках стоят сначала все нечетные, а затем все четные числа).

Докажем, что в случае четного n выбрать n клеток нужным образом нельзя. Занумеруем строки таблицы снизу вверх: 1, 2, ..., n, а столбцы — слева направо. Обозначим через a_{ij} число, стоящее на пересечении i-го столбца и j-й строки. Легко показать, что

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j, & \text{если } i > j, \\ i - j + n, & \text{если } i \leqslant j. \end{cases}$$

Поэтому, если все n чисел a_{ij} взять из разных строк и разных столбцов, то сумма их обязана делиться на n (i и j пробегают все значения от 1 до n).

С другой стороны, если все эти n чисел — разные, то это числа 1, 2, ..., n. Сумма их равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$ и при четном n на n не делится. Значит, в этом случае выбрать клетки так, как требуется в задаче, нельзя.

[Многие читатели ошибочно считали, что если все n чисел взяты из разных строк и разных столбцов, то это обязательно числа, стоящие по диагонали таблицы (идущие из левого верхнего в правый нижний угол), и доказывали невозможность требуемого выбора (при четных n) только для этого случая.]

А. Ненашев

◆

М427. а) Докажите, что существует нечетное число n, для которого ни при каком четном k ни одно из чисел бесконечной последовательности

$$k^k + 1,\ k^{k^k} + 1,\ k^{k^{k^k}} + 1, \ldots$$

не делится на n.

б) Докажите, что для каждого натурального n существует такое натуральное число k, что каждый из членов бесконечной последовательности

$$k + 1,\quad k^k + 1,\quad k^{k^k} + 1,\quad k^{k^{k^k}} + 1, \ldots$$

делится на n.

а) Таково, например, число $n=3$. В самом деле, поскольку k — четное число, все числа k^k, k^{k^k}, ... — также четные, и любой член нашей последовательности имеет вид $k^{2m}+1=(k^m)^2+1$, где m — натуральное число. Но квадрат любого целого числа либо делится на 3, либо дает в остатке 1, так что число $(k^m)^2+1$ на 3 не делится ни при каком m.

[Некоторые читатели неправильно поняли условие задачи а) и для каждого k находили свое значение n.]

б) Положим $k=2n-1$ и докажем, что любой член последовательности $k+1$, k^k+1, $k^{k^k}+1$, ... делится на n.

В самом деле, любое из чисел k^k, k^{k^k}, ... при нечетном k является нечетным, так что любой член нашей последовательности имеет вид $k^{2m+1}+1$ (m — натуральное) и делится на $k+1=2n$ $[x^{2m+1}+1=(x+1)(x^{2m}-x^{2m-1}+x^{2m-2}-\ldots+(-1)^k x^k+\ldots+1)]$, что и требовалось доказать.

С. Лавренченко

◆

М428. В олимпиаде участвуют $(m-1)n+1$ человек. Докажите, что среди них либо найдутся m участников, попарно незнакомых между собой, либо найдется один участник, знакомый не менее чем с n участниками олимпиады. Останется ли верным утверждение задачи, если число участников олимпиады уменьшить на единицу?

Вначале ответим на последний вопрос: если число участников олимпиады равно $(m-1)n$, то утверждение задачи неверно. Сказанное подтверждает такой пример: на олимпиаду приехали $(m-1)$ команд по n участников в каждой, причем члены каждой команды знакомы друг с другом, а любые два участника из разных команд между собой не знакомы.

Докажем теперь утверждение задачи для $(m-1)n+1$ участников индукцией по числу m.

Для $m=2$ утверждение очевидно. Допустим, что оно верно для $m-1$ и докажем его для m. Выберем любого участника олимпиады. Он либо знаком не менее чем с n другими участниками, и тогда ничего доказывать не нужно, либо знаком не более чем с $(n-1)$ участником. В этом случае он незнаком не менее чем с $(m-1)n-(n-1)=(m-2)n+1$ участниками. По предположению индукции среди них либо найдутся $(m-1)$ участников, попарно не знакомых между собой — в этом случае они вместе с ранее выбранным образуют группу из m участников, попарно не знакомых друг с другом; либо среди них найдется участник, знакомый не менее чем с n другими участниками олимпиады. Утверждение доказано.

Э. Туркевич

◆

M429. *а) Сколько решений имеет уравнение*
$$[x]-1977\{x\}=1978?$$
(Здесь $[x]$ — целая часть x, а $\{x\}=x-[x]$.)

б) Докажите, что при любых $p\neq 0$ и q уравнение
$$[x]+p\{x\}=q$$
имеет $[|p|]$ или $[|p|]+1$ решений.

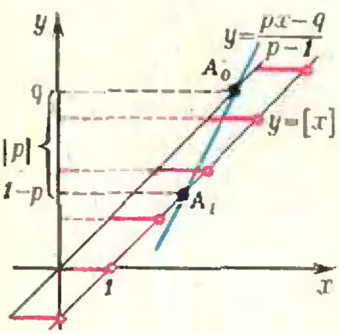


Рис. 2.

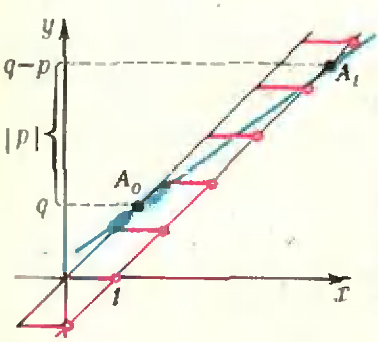


Рис. 3.

Приведем одно из наиболее коротких решений, присланных читателями. Пусть $p\neq 1$. (Случай $p=1$ тривиален: уравнение
$$[x]+p\{x\}=q \qquad (1)$$
превращается в $x=q$.) Тогда (1) эквивалентно
$$[x]+px-p[x]=q \Leftrightarrow [x]=\frac{px-q}{p-1}. \qquad (2)$$

Прямая $y=(px-q)/(p-1)$ пересекает края полосы, ограниченной прямыми $y=x$ и $y=x-1$ и заключающей график $y=[x]$, в точках $A_0(q;\ q)$ и $A_1(q-p+1;\ q-p)$ (рисунки 2 и 3; чтобы найти абсциссы x_0, x_1 этих точек, нужно лишь решить уравнения $px_0-q=x_0(p-1)$ и $px_1-q=(x_1-1)(p-1)$). Ясно, что число решений уравнений (2), то есть число горизонтальных прямых $y=h$ (h целое), пересекаемых отрезком $[A_0A_1[$ (без точки A_1), равно количеству целых чисел, заключенных между q и $q-p$ (включая q, если оно целое, но не включая $q-p$). Теперь нетрудно привести о т в е т в задаче а): отрезок $[1978;\ 1978+1977[$ содержит 1977 целых точек,— и доказать утверждение задачи б): на любом отрезке длины $|p|$ числовой прямой лежит $[|p|]$ или $[|p|]+1$ целых точек.

Можно решать эту задачу, оставив в уравнении x и $\{x\}$ («дробную часть» x). Некоторые читатели, которые шли по этому пути, ошибались в определении $\{x\}$ при $x<0$ (обратите внимание, что $\{-0{,}1\}=0{,}9$; $\{-\sqrt{2}\}=-2+\sqrt{2}$ и т. п.).

Наше решение приятно тем, что случаи разных знаков p (рисунки 2 и 3) рассматриваются одновременно. Разобравшись в нем, вы сможете провести исследование множества решений такого уравнения: $ax+b[x]+c=0$ (эту задачу прислал нам *И. С. Петраков*); не забудьте рассмотреть особые случаи, когда решения заполняют целый интервал, или составляют бесконечную арифметическую прогрессию.

◆

M430. *а) Докажите, что любую выпуклую плоскую фигуру площади S можно поместить в прямоугольник площади $2S$.*

б) Докажите, что любое выпуклое тело объема V можно поместить в ящик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда объема $6V$.

Назовем *диаметром* выпуклой фигуры (или выпуклого тела) отрезок, соединяющий две точки, расстояние между которыми наибольшее (диаметров может быть, конечно, больше одного; с у щ е с т в о в а н и е диаметра для выпуклого многоугольника и многогранника очевидно — им будет отрезок, соединяющий наиболее далекие друг от друга вершины; существование диаметра произвольного замкнутого ограниченного множества на плоскости или в пространстве мы оставим здесь без доказательства).

а) Пусть $[MN]$ — диаметр данной выпуклой фигуры Φ. Прямые, проходящие через точки M и N, перпендикулярные к отрезку MN, будут *опорными* для фигуры Φ, то есть Φ целиком заключена внутри полосы, ограниченной ими: ведь

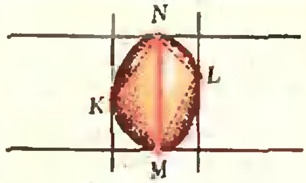
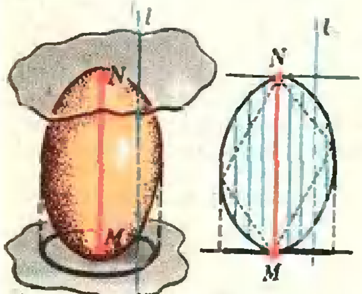
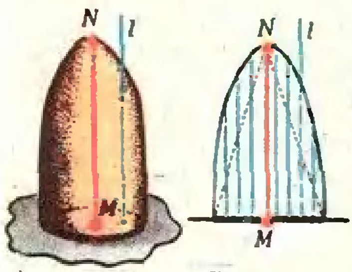


Рис. 4.



а) б)

Рис. 5.



а) б)

Рис. 6.

для любой точки X вне этой полосы либо $|XM| > |MN|$, либо $|XN| > |MN|$. Проведем еще две перпендикулярные этим прямым опорные прямые, содержащие некоторые граничные точки K и L фигуры Φ (рис. 4). Полученный прямоугольник Π удовлетворяет нужному условию: если площадь прямоугольника Π равна s, то площадь Φ не меньше $S_{\triangle KMN} + S_{\triangle LMN} = s/2$.

б) Пусть $[MN]$ — диаметр данного выпуклого тела T, Φ — проекция тела на опорную плоскость α, проходящую через нижний конец M диаметра (мы считаем $[MN]$ вертикальным, рис. 5, *а*). Докажем, что если заключить фигуру Φ в прямоугольник Π такой, как в задаче *а*), то прямоугольный параллелепипед с основанием Π и высотой $[MN]$ — нужная прямоугольная коробка для T. Сделаем с T такое преобразование: каждый отрезок $l \cap T$, где l — вертикальная прямая, сместим вниз так, чтобы нижний его конец попал на плоскость α. Объединение полученных отрезков обозначим $\hat{T}$ (рис. 6, *а*; на рис. 5, *б* и 6, *б* показано преобразование отдельных сечений). Ясно, что объемы T и $\hat{T}$ совпадают (это — аналог *принципа Кавальери*, о котором говорилось в «Кванте» № 2 (статья С. Пухова) и № 5 — (статья В. Болтянского), но здесь тела пересекаются не семейством параллельных плоскостей, а семейством параллельных прямых). При этом $\hat{T}$ содержит конус с основанием Φ и высотой $[MN]$ — это нетрудно доказать, рассмотрев вертикальные сечения. Если объем построенной нами прямоугольной коробки равен V, то объем цилиндра с основанием Φ и высотой $[MN]$ не меньше $V/2$, а объем конуса — не меньше $(V/2)/3 = V/6$. Значит, и объем нашего тела не меньше $V/6$.

Н. Васильев

◆

Ф438. *Однородная палочка лежит внутри шероховатой сферической полости. Длина палочки равна радиусу сферы. Коэффициент трения равен μ. Какой наибольший угол с горизонтом может составлять палочка?*

Очевидно, что палочка будет составлять наибольший угол α с горизонтом, когда плоскость большого круга, проведенная через точки касания палочки со сферой, вертикальна. В этой плоскости на палочку действуют сила тяжести $M\vec{g}$, силы нормальной реакции сферы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ и силы трения $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 7).

Палочка находится в покое, если сумма проекций этих сил на любое направление и сумма моментов сил относительно любой неподвижной оси равна нулю. Запишем условие равновесия палочки в проекции на ее направление:

$$|\vec{N}_1|\cos\varphi - |\vec{N}_2|\cos\varphi + |\vec{F}_1|\sin\varphi + |\vec{F}_2|\sin\varphi - |M\vec{g}|\sin\alpha = 0.$$

Проектируя силы на направление, перпендикулярное к палочке, получим

$$|\vec{N}_1|\sin\varphi + |\vec{N}_2|\sin\varphi - |\vec{F}_1|\cos\varphi + |\vec{F}_2|\cos\varphi - |M\vec{g}|\cos\alpha = 0.$$

Уравнение моментов удобно записать относительно оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через центр сферы:

$$|\vec{F}_1|R + |\vec{F}_2|R - |M\vec{g}|\,R\sin\varphi\sin\alpha = 0.$$

Здесь $\varphi = \pi/3$, R — длина палочки, равная радиусу сферы.

При наибольшем угле α_{max} наклона палочки к горизонту силы трения достигают своих наибольших значений:

$$|\vec{F}_1| = \mu|\vec{N}_1| \quad \text{и} \quad |\vec{F}_2| = \mu|\vec{N}_2|.$$

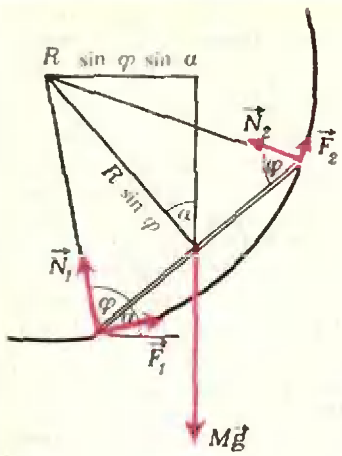


Рис. 7.

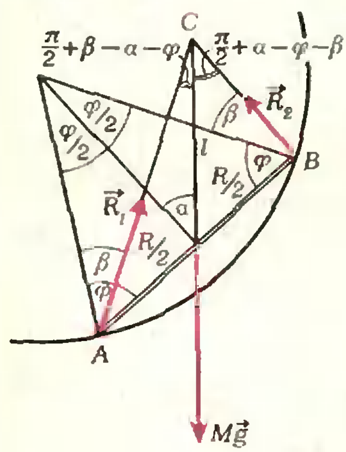


Рис. 8.

Решив полученную систему пяти уравнений, найдем

$$\operatorname{tg}\alpha_{max}=\frac{\mu}{\sin^2\varphi-\mu^2\cos^2\varphi}=\frac{4\mu}{3-\mu^2},$$

$$\alpha_{max}=\operatorname{arctg}\frac{4\mu}{3-\mu^2}.$$

Задачу можно решить также, используя так называемую «теорему о трех силах»: если тело находится в равновесии под действием трех приложенных к нему непараллельных сил, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

В нашем случае тремя силами, приложенными к палочке, являются сила тяжести $M\vec g$ и результирующие сил реакций $\vec R_1=\vec F_1+\vec N_1$ и $\vec R_2=\vec F_2+\vec N_2$ (рис. 8). Поскольку силы трения при наибольшем угле α_{max} наклона палочки максимальны, силы $\vec R_1$ и $\vec R_2$ составляют с радиусами сферы, проведенными в точках касания, один и тот же угол $\beta=\operatorname{arctg}\mu$ (угол трения).

Рассмотрим треугольник ACB, в котором палочка является основанием, а точка C пересечения линий действия сил — противолежащей вершиной. Линия действия силы тяжести делит упомянутый треугольник на два, имеющих общую сторону длиной l (медиану треугольника ACB) и конгруэнтные основания длиной по $R/2$. Применив к каждому треугольнику теорему синусов, получим

$$\frac{\sin(\pi/2+\alpha-\varphi-\beta)}{R/2}=\frac{\sin(\varphi+\beta)}{l}$$

и

$$\frac{\sin(\pi/2-\alpha-\varphi+\beta)}{R/2}=\frac{\sin(\varphi-\beta)}{l},$$

где $\operatorname{tg}\beta=\mu$ и $\varphi=\pi/3$.

Поделив эти два уравнения одно на другое, получим

$$\frac{\cos(\alpha-\varphi-\beta)}{\cos(\alpha+\varphi-\beta)}=\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin(\varphi-\beta)},$$

из которого найдем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{4\mu}{3-\mu^2}.$$

Б. Буховцев

◆

Ф439. *Неоновая лампочка (НЛ) загорается, когда напряжение на ней достигает значения U_1. При этом сопротивление лампочки становится пренебрежимо малым. Когда напряжение на лампе падает до значения U_2, лампа гаснет, и ее сопротивление становится бесконечно большим. Эту лампу включили в цепь, как показано на рисунке 9. Считая $\mathscr{E}\gg U_1>U_2$, построить примерный график зависимости напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа K.*

После замыкания ключа K в цепи потечет ток, и напряжение на конденсаторе начнет расти, пока не достигнет значения U_1, при котором зажигается неоновая лампочка. Поскольку $\mathscr{E}\gg U_1$, можно считать, что в течение всего времени зарядки конденсатора ток $I=\mathscr{E}/R$ и напряжение U_C на конденсаторе растет по линейному закону (рис. 10).

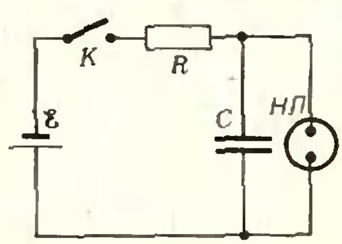


Рис. 9.

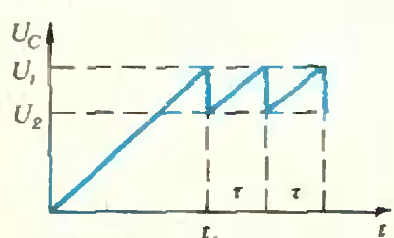


Рис. 10.

В момент времени t_1, когда напряжение на конденсаторе станет равным U_1, загорится лампочка. Время t_1 можно найти из условия

$$It_1 = Q = CU_1, \text{ и } t_1 = \frac{CU_1R}{\mathscr{E}}.$$

При загорании лампочки конденсатор практически мгновенно разрядится до напряжения U_2, при котором лампочка гаснет. Затем в течение промежутка времени τ конденсатор снова будет заряжаться до напряжения U_1 и т. д.

Таким образом, напряжение на конденсаторе периодически изменяется с периодом

$$\tau = \frac{(U_1 - U_2)CR}{\mathscr{E}}.$$

Рассмотренная схема представляет собой так называемый генератор пилообразного напряжения.

В. Копылов

Ф440. *Оцените приближенно, при каком минимальном радиусе планеты она сможет удерживать атмосферу, состоящую в основном из кислорода и азота, если температура поверхности планеты $T = 300$ К. Среднюю плотность вещества планеты принять равной $\rho = 4 \cdot 10^3$ кг/м³.*

Рассмотрим молекулу, входящую в состав атмосферы планеты. Эта молекула будет удерживаться в непосредственной близости от поверхности планеты, если ее кинетическая энергия не превосходит потенциальной энергии молекулы в гравитационном поле планеты:

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} \leqslant \gamma \frac{mM}{r}.$$

Здесь m — масса молекулы, $\overline{v^2}$ — средний квадрат ее скорости, γ — гравитационная постоянная, M — масса планеты и r — ее радиус. Оценку минимального радиуса планеты можно провести, используя равенство кинетической и потенциальной энергий по порядку величины:

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} \approx \gamma \frac{mM}{r_{\min}}. \qquad (1)$$

Средний квадрат скорости молекулы газа связан с температурой T газа соотношением

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m} = \frac{3RT}{\mu},$$

где k — постоянная Больцмана, R — универсальная газовая постоянная, μ — молярная масса газа. Массу планеты можно выразить через среднее значение ρ плотности вещества планеты и ее минимальный радиус $r_{\min}$:

$$M = \frac{4}{3}\pi r_{\min}^3 \rho.$$

Тогда соотношение (1) можно переписать в таком виде:

$$\frac{3RT}{2\mu} \approx \frac{4}{3}\gamma\pi r_{\min}^2 \rho, \quad \text{откуда}$$

$$r_{\min} \approx \sqrt{\frac{9RT}{8\gamma\pi\rho\mu}}. \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что $r_{\min}$ зависит (при прочих равных условиях) от молярной массы μ: $r_{\min}$ тем меньше, чем больше μ. По условию задачи атмосфера планеты состоит в основном из кислорода и азота, для которых молярные массы равны соответственно $\mu_к = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и $\mu_а = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Очевидно, для оценки минимального радиуса планеты достаточно найти $r_{\min}$, считая, что атмосфера состоит только из азота.

Итак,

$$r_{\min} \approx \sqrt{\frac{9RT}{8\gamma\pi\rho\mu_а}} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ м} = 300 \text{ км}.$$

С. Козел

Ф441. *Между пластинами замкнутого плоского конденсатора находится точечный заряд q. Площадь пластин бесконечно велика, расстояние между ними равно d. Первоначально заряд находится на расстоянии $\frac{1}{3}d$ от левой пластины.*

Какой заряд пройдет по проводнику, замыкающему пластины конденсатора, при перемещении заряда q в новое положение, при котором он будет находиться на расстоянии $\frac{1}{3}d$ от правой пластины?

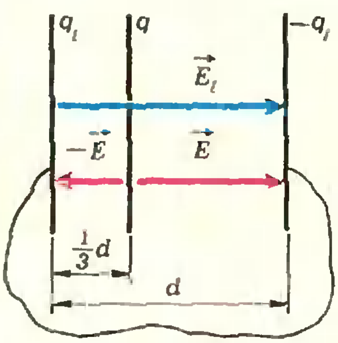


Рис. 11.

Так как пластины конденсатора большие, индуцированные на них заряды не изменятся при перемещении заряда q параллельно плоскостям пластин (краевыми эффектами мы пренебрегаем). Это означает, что не изменятся заряды пластин и в том случае, если заряд q равномерно «размазать» по плоскости, параллельной пластинам конденсатора и находящейся первоначально на расстоянии $\frac{1}{3}d$ от левой пластины.

Обозначим через q_1 заряд левой пластины конденсатора. Тогда заряд правой пластины (согласно закону сохранения заряда) равен $-q_1$. Заряды q_1 и $-q_1$ пластин конденсатора создают между пластинами электростатическое поле с напряженностью $|\vec{E}_1| = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S}$ (S — площадь каждой пластины), а находящаяся внутри конденсатора пластина с зарядом q — поле с напряженностью $|\vec{E}| = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$ (рис. 11). С одной стороны от пластины направления напряженностей обоих полей совпадают, а с другой стороны — противоположны друг другу. Поэтому разность потенциалов $\Delta\varphi$ между пластинами конденсатора равна

$$\Delta\varphi = \left(|\vec{E}_1| - |\vec{E}|\right)\frac{1}{3}d + \left(|\vec{E}_1| + |\vec{E}|\right)\frac{2}{3}d.$$

С другой стороны, так как пластины конденсатора замкнуты, напряжение между ними равно нулю: $\Delta\varphi = 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{3}d\left(\frac{q_1}{\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\right) + \frac{2}{3}d\left(\frac{q_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\right) = 0.$$

Из этого уравнения найдем заряд q_1:

$$q_1 = -\frac{1}{6}q.$$

Аналогично можно найти заряд q_1' левой пластины конденсатора, когда средняя пластина (заряд q) находится от нее на расстоянии $\frac{2}{3}d$:

$$q_1' = \frac{1}{6}q.$$

Таким образом, при перемещении внутри конденсатора точечного заряда q (или заряженной пластины) по проводнику, соединяющему пластины конденсатора, проходит заряд

$$\Delta q = q_1' - q_1 = \frac{1}{3}q.$$

И. Слободецкий

Б. Гейдман

Гомотетия и замечательные точки в треугольнике

В этой заметке мы расскажем, как с помощью гомотетии решаются многие трудные планиметрические задачи — в частности, задачи про замечательные точки в треугольнике.

Задача про трапецию

Начнем с задачи про трапецию. Вот ее формулировка:

Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции и точку пересечения ее диагоналей, проходит через середины оснований трапеции.

Как ее решать? Нарисуем трапецию, продолжим ее боковые стороны, проведем диагонали, соединим середины оснований (см. рис. 1). Мы видим, что образуется много пар подобных треугольников. С подобными фигурами связано отображение плоскости на себя, которое называется *гомотетией*. При гомотетии с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ образом произвольной точки X является точка X_1 такая, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$ (см. «Геометрию 7», п. 79). Попробуем решить нашу задачу про трапецию, используя гомотетию.

Пусть S — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$, O — точка пересечения ее диагоналей (рис. 1).

Рассмотрим две гомотетии: H_S с центром S и H_O — с центром O, переводящие основание AD трапеции в основание BC. Середина M отрезка AD и в той и в другой гомотетии перейдет в середину N отрезка BC, а потому точки M и N лежат на прямой OS, проходящей через центры гомотетии H_S и H_O.

Разберем это решение подробнее.

Гомотетия H_S задается своим центром S и парой соответствующих точек A и B. По свойству гомотетии прямая AD при этом перейдет в параллельную ей прямую BC. Образ точки D будет находиться на прямой BC. С другой стороны, точка, соответствующая точке D, лежит на прямой SD, проходящей через центр гомотетии S.

Таким образом, гомотетия H_S переводит точку D в точку пересечения прямых BC и SD, т. е. в точку C, а основание трапеции AD — в основание BC: $H_S([AD]) = [BC]$.

Аналогично доказывается, что $H_0([AD]) = [CB]$ (гомотетия H_O задается центром O и парой соответствующих точек A и C).

Середину отрезка гомотетия переводит в середину образа этого отрезка, так как при гомотетии все расстояния между точками умножаются на одно и то же число, равное модулю коэффициента гомотетии.

И, наконец, середины оснований трапеции, как соответствующие точки гомотетии, лежат на прямой, проходящей через ее центр.

Центр тяжести треугольника

Докажем теперь с помощью результата задачи о трапеции теорему о медианах треугольника, а именно, докажем, что *медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2 : 1, считая от вершины.*

Доказательство. Пусть AD, BE и CF — медианы треугольника ABC (рис. 2). В трапеции $AFDC$ медианы AD и CF служат диагоналями, а потому точка M их пересечения лежит на прямой, соединяющей середину E основания AC трапеции с точкой пересечения продолжений ее боковых сторон AF и CD, то есть — с вершиной B треугольника. Таким образом, точка M пересечения медиан AD и CF лежит и

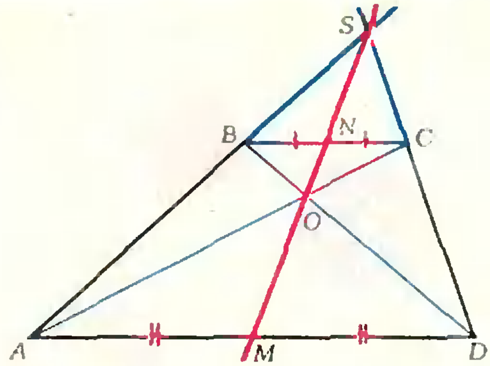


Рис. 1.

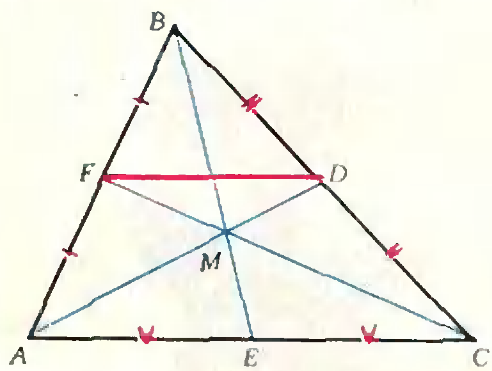


Рис. 2.

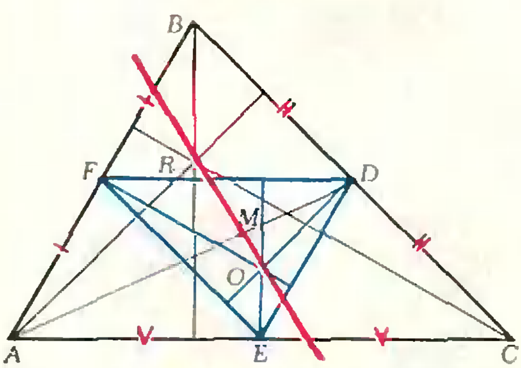


Рис. 3.

на медиане BE, то есть все три медианы треугольника ABC действительно пересекаются в одной точке M. Точка пересечения медиан треугольника и называется его *центром тяжести*.

Далее. Гомотетия H_M, переводящая основание AC трапеции $AFDC$ в основание DF, имеет коэффициент $k = -\frac{1}{2}$, так как $|FD| = \frac{1}{2}|AC|$ ($[FD]$ — средняя линия треугольника ABC). Поэтому $|AM| : |MD| = |CM| : |MF| = |BM| : |ME| = 2 : 1$. Это завершает доказательство теоремы о медианах.

Ортоцентр треугольника

Докажем еще одну теорему.

Высоты треугольника пересекаются в одной точке. (Точка пересечения высот называется *ортоцентром* треугольника.)

Доказательство. Пусть M — центр тяжести данного треугольника ABC; F, D и E — середины его сторон (рис. 3). Рассмотрим гомотетию H_M^{-2} с центром в точке M и коэффициентом $k = -2$. Эта гомотетия переводит точки F, D и E соответственно в вершины C, A и B треугольника ABC, а высоты треугольника FDE — в высоты треугольника ABC. Но высоты треугольника FDE, являясь серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке O — центре описанной около треугольника ABC окружности. Следовательно, их образы (при гомотетии H_M^{-2}) также пересекаются в одной точке R (*ортоцентре* треугольника ABC).

Попутно мы доказали такое важное следствие:

Центр тяжести M любого треугольника, его ортоцентр R и центр O описанной около него окружности лежат на одной прямой (*она называется прямой Эйлера*), *причем точка M расположена между точками O и R так, что $|MR| = 2\ |OM|$.*

Задачи

1. Найдите гомотетии, переводящие один из двух данных параллельных отрезков в другой.

2. На плоскости заданы окружность и две точки A и B на ней. Пусть N — произвольная точка этой окружности, M — центр тяжести треугольника ABN. Найдите множество точек M.

3. На плоскости заданы две концентрические окружности. Проведите хорду в большей из них так, чтобы она делилась меньшей окружностью на три конгруэнтные части.

4. Две окружности касаются внешним образом. Точки касания общих внешних касательных последовательно соединены. Докажите, что в получившейся четырехугольник можно вписать окружность.

5. Дан острый угол AOB и внутри него точка C. Найдите на стороне OB точку M, равноудаленную от стороны OA и от точки C.

6*. Докажите, что во всяком треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной окружности. (Эта окружность называется *окружностью девяти точек*.)

Задачи

1. а) В трехзначном числе зачеркнули первую слева цифру, затем полученное двузначное число умножили на 7. В результате получилось исходное трехзначное число. Найти такое число.

б) В трехзначном числе зачеркнули среднюю цифру, получилось число, в 6 раз меньшее. Найдите такое трехзначное число.

в) Найдите все трехзначные числа, которые при зачеркивании средней цифры уменьшаются в 7 раз, в 9 раз.

2. На столе лежат в ряд четыре фигуры: треугольник, ромб, круг, квадрат. Цвета этих фигур: зеленый, желтый, синий, красный. В каком порядке лежат фигуры и каков цвет каждой из них, если фигура красного цвета лежит между зеленой и синей, справа от желтой фигуры лежит ромб, круг лежит правее треугольника и ромба, причем треугольник лежит не с краю, и, наконец, фигура синего цвета не лежит рядом с фигурой желтого цвета?

3. Тамаре в 1977 году исполнится столько лет, какова сумма цифр года ее рождения. В каком году она родилась?

4. Квадратная таблица $n \times n$ заполнена натуральными числами от 1 до n^2, причем в первой строке записаны подряд числа от 1 до n, во второй от $n+1$ до $2n$ и так далее.

Доказать, что если вырезать из этой таблицы квадрат $m \times m$, то сумма стоящих в нем чисел будет делиться на m^2.

Е. Семенов

Степа Мошкин повторяет геометрию

1. В чем ошибка? И есть ли она?

Давно уже Степа Мошкин не приходил домой таким расстроенным.

— Ты посмотри, папа, как я старался,— жаловался он отцу.— Вот ось симметрии — проведена черным цветом (см. рис. 1). Вот данный треугольник — синенький! А вот желтый треугольник — это образ данного треугольника в осевой симметрии. Все в цвете, сделано аккуратно, как надо! А Петр Иванович даже не посмотрел как следует, даже в руки не взял. Бросил взгляд и говорит: «Неверно! Плохо повторяешь геометрию. Придется переделать!» А что тут переделывать, если все сделано так старательно!

Отец не спеша, пережидая, пока сын немного успокоится, рассматривал его рисунок. Потом произнес:

— Да, к сожалению, Петр Иванович прав: плоховато ты повторил этот материал. Тут на самом деле есть ошибки.

— Какие же?! — воскликнул Степа.

— А ты сначала скажи, что такое осевая симметрия с осью l?

— Ну-у, это перемещение, в котором точки прямой l остаются на месте, а...

— Не продолжай, достаточно. Выполнено это условие на твоем чертеже?

Степа замер над чертежом в поисках ошибки.

Посмотрите и вы на рисунок. Видите маленький желтый треугольник, образовавшийся при пересечении прямых l, AC и A_1C_1? И еще один — с другой стороны? В этом и заключается ошибка Степы. Отрезок A_1C_1 должен пересекать прямую l в той же точке, что и отрезок AC, ведь в симметрии с осью l точки прямой l остаются на месте.

Такие точки — остающиеся на месте в некотором отображении — называются *неподвижными*. Их часто можно использовать для построения образа фигуры.

2. Другое построение

Таня решила ту же задачу, что и Степа, иначе, и на следующем уроке Петр Иванович предложил Степе, глядя на Танин рисунок (рис. 2), рассказать, как она выполняла построения. Степа сразу заметил, что Таня пользовалась циркулем и линейкой, причем точки A_1, B_1 и C_1 получились как пересечения дуг окружностей.

— При чем здесь окружность? —

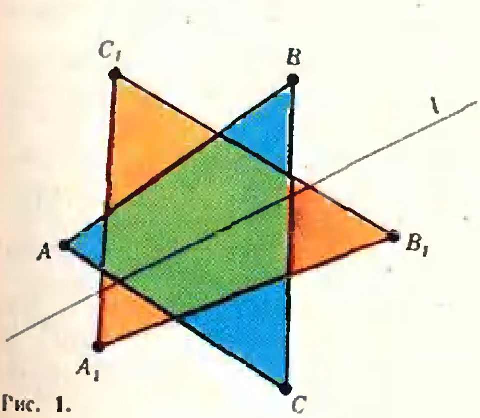


Рис. 1.

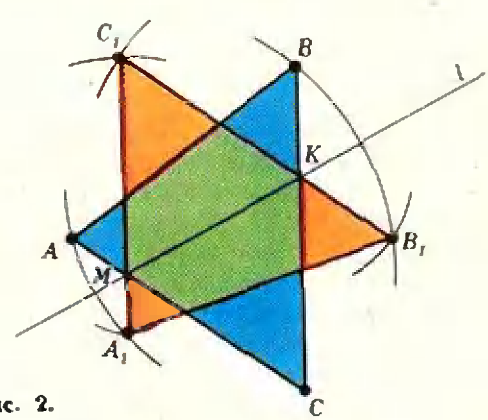


Рис. 2.

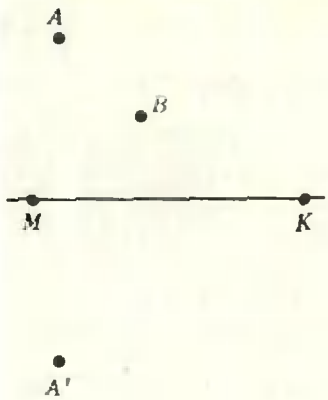


Рис. 3.

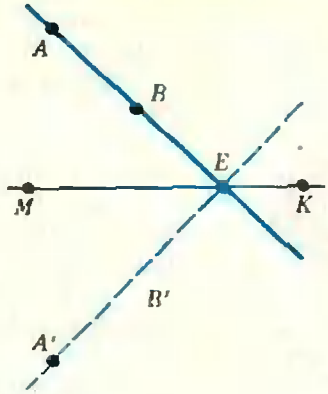


Рис. 4.

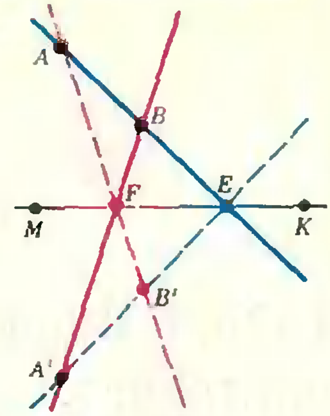


Рис. 5.

стал вслух размышлять Степа. — Окружность — это множество точек, находящихся на одном и том же расстоянии от данной точки. А расстояния... расстояния осевая симметрия сохраняет! Ага, Таня, наверное, использовала точки M и K пересечения прямых AC и BC с прямой l. Точка M остается на месте, поэтому должно быть

$$|MC| = |MC_1|,$$

и аналогично

$$|KC| = |KC_1|.$$

Значит, точка C_1 получится как пересечение окружности с центром в точке M радиуса $|MC|$ с окружностью с центром K радиуса $|KC|$. Правда, эти окружности пересекутся в двух точках. Какая же вторая?.. Так это же точка C. Все ясно. Так же Таня строила точки A_1 и B_1. Получается, что линейка для построения образов точек в осевой симметрии вообще не нужна. Хватит двух точек на оси l и циркуля. Здорово!

3. Неподвижные точки помогают Степе

Вечером Степа рассказал папе о Танином способе построения образов точек в осевой симметрии, а затем сел делать уроки. Открыв тетрадь, он прочитал. «На дом — решить задачу 33» (см. «Геометрия 6», стр. 104). Вот она, эта задача.

Даны ось симметрии (MK), симметричные точки A и A' и еще одна точка B такая, что прямая AB пересекает ось симметрии. С помощью одной линейки постройте точку B', симметричную B относительно (MK).

Степа изобразил указанные элементы черным цветом (см. рис. 3) и задумался.

— Если бы воспользоваться угольником! Но нельзя. И циркуль также попал в число «запрещенных» инструментов. Можно пользоваться только одной линейкой. Как поступить?.. У Тани был один циркуль. Она проводила им окружности и находила образы точек как точки пересечения окружностей. У меня одна линейка. Тоже одна! И проводить я могу только прямые. Так, может, искать точку B' как пересечение двух прямых? Что же это будут за прямые? Видимо, образы прямых, проходящих через точку B. А как искать образы прямых? Нужны образы двух точек. Ну что же, образ одной точки есть — ведь даны точки A и A'.

Степа нарисовал синим цветом прямую AB (рис. 4) и стал рассуждать дальше.

— Нужен образ еще одной точки прямой AB. Ага, если прямые AB и MK пересекаются в точке E, то эта точка E — неподвижная в симметрии с осью MK. Значит, образом прямой AB будет прямая $A'E$.

Степа провел пунктиром прямую $A'E$ (рис. 4) и снова задумался.

— Где же на прямой $A'E$ будет точка B'? Нужна еще прямая. А как ее проводить? Может, есть образ еще одной точки?

Степа еще раз перечитал условие задачи. Нет, образов других точек нет. Впрочем, ...сказано «симметричные точки A и A'». Что это значит? Точка A' — образ точки A. Но ведь тогда A — образ точки A'.

Степа поскорее схватил красный карандаш и провел прямую $A'B$. Ура! Она пересекла прямую MK в точке F (рис. 5), прямая AF пересеклась с прямой $A'E$, и Степа, торжествуя, поставил около точки их пересечения: B'.

Упоенный победой над непокорной было задачей, Степа закрыл тетрадь. И в то же мгновение его что-то кольнуло: с задачей не все ладно. Степа открыл тетрадь, посмотрел на рисунки и замер.

— А что, если прямые AF и $A'E$ параллельны? — Спеша, он набросал рисунок. — Как тогда решить задачу? Да и прямая AB может пересечь прямую MK за пределами листа бумаги, и тогда неподвижной точки не будет!

Но, немного подумав, Степа успокоился. Он нашел способ решения задачи и в этом случае.

Задачи

1. На рисунке 6 синим цветом изображены данные фигуры, а красным — их образы в осевой симметрии с осью l. Имеются ли ошибки в этих построениях? Можете ли вы их обнаружить «с первого взгляда»?

2. Степа нашел способ решения задачи (№ 33) в случае, когда $(AF) \parallel (A'E)$ или точка E (или F) оказывается за пределами листа бумаги. А вы сможете это сделать?

3. Дана ось симметрии l, пара симметричных точек A и A' и прямая a, параллельная l. Пользуясь одной линейкой, постройте образ прямой a.

4. Что за перемещение?... Неизвестно... Но нужно ли это знать?

Повторяя геометрию, Степа дошел до пункта 20, написанного мелким шрифтом (см. «Геометрия 6», с. 48).

— Это не обязательно, — подумал он. Но из любопытства посмотрел на рисунок, а затем наугад прочел.

«2. *Любое сохраняющее расстояние отображение плоской фигуры Φ на лежащую в той же плоскости фигуру Φ_1 можно выполнить при помощи перемещения, то есть при помощи отображения всей плоскости на себя, сохраняющего расстояния*».

— Отображение фигуры Φ на фигуру Φ_1, сохраняющее расстояния... — размышлял Степа. — Но ведь это означает, что $\Phi \cong \Phi_1$! Точно, вот в п. 14 определение конгруэнтных фигур! Но тогда прочитанное мною свойство можно пересказать так: *если $\Phi \cong \Phi_1$, то существует перемещение, при котором Φ отображается на Φ_1?!* И в этом перемещении можно построить, вероятно, образ любой фигуры? Интересно. Возьму-ка я в качестве Φ треугольник ABC (рис. 7), в качестве Φ_1 — треугольник $A_1B_1C_1$. Конгруэнтны они? Вроде, да. Так. Значит, существует перемещение, отображающее треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$. Теперь нарисую еще полуплоскость с границей BC, не содержащую треугольник ABC. И еще квадрат $DEFG$. Куда же они отобразятся? Чтобы это найти, надо... надо знать, что это за перемещение. Но что же это за перемещение? Осевая симметрия?... Нет. Поворот? Параллельный перенос? Кажется, тоже нет.

Степа задумался. Он долго ломал голову, пока, наконец, не произнес.

— А может, это и не нужно знать? Достаточно знать, что перемещение, и все? Ведь можно же воспользоваться свойствами перемещения вообще! При перемещении полуплоскость отображается на полуплоскость, прямая — на прямую. У меня $(BC) \to$

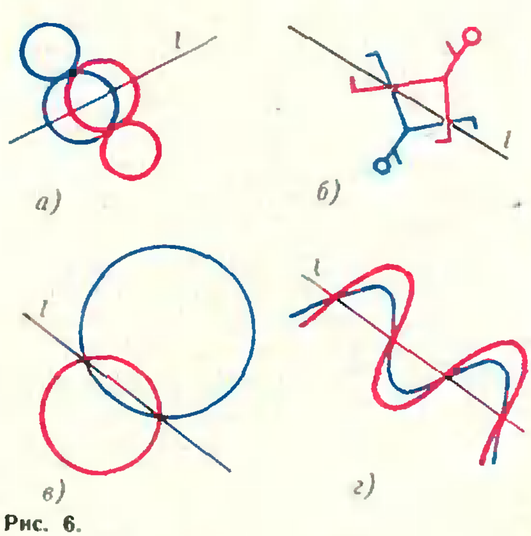


Рис. 6.

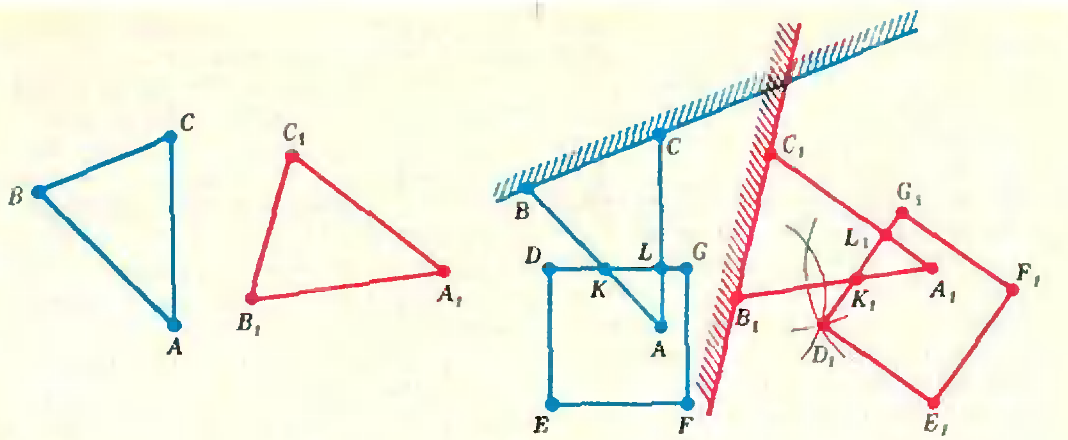


Рис. 7.

$\to (B_1C_1)$. Но полуплоскостей с границей (B_1C_1) две. На которую отобразится «синяя» полуплоскость?.. Синяя полуплоскость не содержит точку A... Значит, ее образ не должен содержать точку A_1!

И Степа, сияя от догадки, закрасил искомую полуплоскость красным цветом.

— Победа! Но еще неполная. А как построить образ квадрата?.. Квадрат не лежит в «синенькой» полуплоскости, значит, его образ не будет лежать в «красной» полуплоскости... Но как же его построить!? Что я могу? Могу построить образы точек K и L — эти образы будут лежать на отрезках A_1B_1 и A_1C_1, причем на том же расстоянии от точки A_1, что точки K и L — от точки A. Затем могут провести прямую K_1L_1 и на ней с помощью циркуля найти точки D_1 и G_1... циркуля... Стоп. Так уже делала Таня. Она одним циркулем строила образы новых точек по образам уже известных. Может, и здесь засечь точку D из точек A и B и перенести эти размеры на образы точек? Если я проведу окружности с центрами в точках A_1 и B_1 радиусов $|AD|$ и $|BD|$, то они пересекутся в двух точках. Одна из них D_1. Какая же именно? Ага, точка D вне треугольника ABC, значит D_1 — вне треугольника $A_1B_1C_1$. А можно еще сделать засечку из точки C_1, тогда все будет совсем ясно. И Степа тут же построил квадрат $D_1E_1F_1G_1$.

— Ну вот, еще одно открытие! До чего же хороший инструмент —

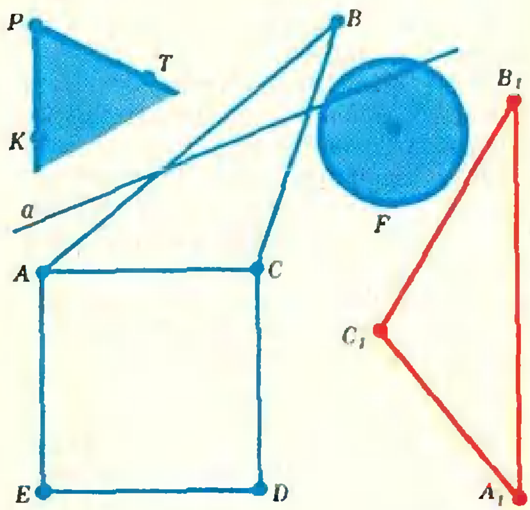


Рис. 8.

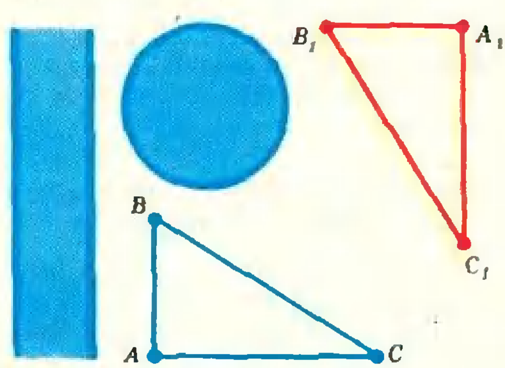


Рис. 9.

циркуль! — облегченно вздохнул наш герой, и стал придумывать новые задачи.

Задачи

4. В некотором перемещении треугольник ABC отобразился на треугольник $A_1B_1C_1$.

а) Постройте фигуру, на которую ото-

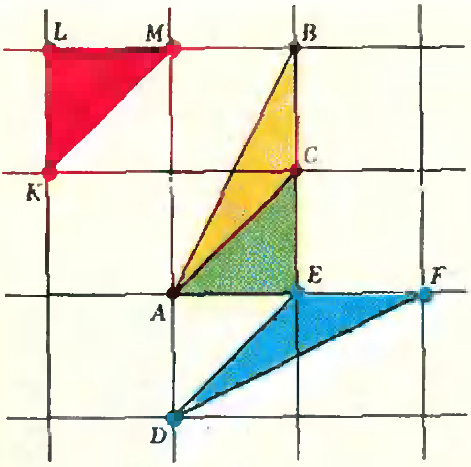


Рис. 10.

бразится в этом перемещении прямая a (рис. 8), круг F, квадрат $ACDE$, точка A_1, угол KPT.

б) Постройте образы окружности и полосы, изображенных на рисунке 9.

5. Дана равнобедренная трапеция. С помощью одной линейки постройте ее ось симметрии.

6. Задан центр поворота O и угол поворота α. Пользуясь одним циркулем, постройте образ произвольной точки A, если угол поворота равен: а) $60°$; б) $120°$.

7. Задан центр симметрии O. Как, пользуясь одним циркулем, построить точку, симметричную произвольной заданной точке A?

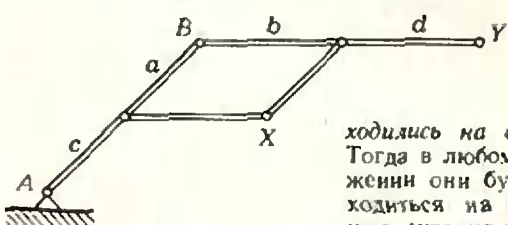
8. Дан отрезок AB. Пользуясь одним циркулем, постройте отрезок, имеющий в три раза бо́льшую длину.

9. На листе клетчатой бумаги отмечены некоторые точки (см. рис. 10).

а) В некотором перемещении треугольник ABC отобразился на треугольник DEF. Найдите образы точек A, B, C в этом перемещении.

б) В некотором перемещении треугольник ACE отобразился на треугольник KLM. Отметьте все точки, которые могут быть образами точек A, B, C, D, E, F. С помощью каких известных вам перемещений треугольник ACE можно отобразить на треугольник KLM?

Пантограф



Мой приятель, которому подарили пантограф, обратился ко мне с вопросом:

Какому соотношению должны удовлетворять длины a, b, c, d в этом пантографе, чтобы траектория точки Y была подобна траектории точки X?

Мы нашли описание работы пантографа (правда, несколько иного вида) в п. 97 учебника «Геометрия 7». Оказалось, что *для того, чтобы пантограф работал нужным образом, достаточно, чтобы в исходном положении точки A, X и Y находились на одной прямой.* Тогда в любом другом положении они будут также находиться на одной прямой и траектория точки Y будет гомотетична траектории точки X. Поэтому, если обводить точкой X контур какой-нибудь фигуры, то точка Y будет вычерчивать контур подобной фигуры.

По-видимому, читателю нетрудно будет самому ответить на вопрос моего приятеля, сопоставить устройство его пантографа и пантографа, изображенного в учебнике, а также ответить на контрольные вопросы.

1. Будет ли траектория точки Y подобна траектории точки X, если

1°) $a=5$, $b=3$, $c=10$, $d=6$;

2°) $a=3$, $b=5$, $c=10$, $d=6$?

При исследовании работы пантографа естественно возникает вопрос: какого размера фигуры он может вычерчивать?

2. Художник, нарисовавший в учебнике рисунок 186, немного ошибся. Найдите ошибку художника (правильно ли расставлены булавки?).

3. Найдите множество точек X, если $b=3$, $c=5$.

4. Покажите, что если $b=5$, $c=3$, то множество точек X совпадает со множеством из задачи 2.

Занявшись исследованием работы пантографа, мы с приятелем навели справки и выяснили, что пантограф был описан, по-видимому, еще в 1635 году Христианом Шейнером в книге «Pantographia seu Ars delineandi res quaslibet», а слово «пантограф» в переводе означает примерно *«рисующий все»*.

В. Гутенмахер

Н. Андрианова,
Т. Шорыгина

Подготовительные курсы при МИСИ

В этом номере мы помещаем статью об очных и заочных курсах по подготовке в вуз при МИСИ. Подобные курсы созданы практически при всех вузах. Эти курсы особенно полезны тем, кто проживает вдали от крупных городов, давно окончил школу и хочет в течение оставшегося до экзаменов времени проверить свои знания, восполнить пробелы. Для поступления на подготовительные курсы надо послать в избранный вами вуз письмо (в адрес подготовительных курсов), вложив в него конверт со своим адресом, в котором вы получите подробную инструкцию.

Курсы по подготовке к поступлению в вузы при Московском инженерно-строительном институте им. В. В. Куйбышева функционируют около двадцати лет. Эти курсы дают возможность производственникам со стажем работы и демобилизованным воинам, имеющим значительный перерыв в учебе, повторить программу средней школы без отрыва от производства и подготовиться к сдаче вступительных экзаменов в вуз, помогают учащимся десятых классов более глубоко усвоить наиболее трудные вопросы школьной программы. Кроме того, подготовительные курсы являются переходной ступенькой от школы к вузу, занятия на подготовительных курсах приучают к новым формам обучения, с которыми сегодняшние абитуриенты, а завтрашние студенты столкнутся в вузе: лекциям, семинарским занятиям, коллоквиумам; приучают работать с книгой.

Занятия на курсах проводятся как по новой, так и по старой программам. Работа курсов проводится в несколько потоков с продолжительностью от 1 до 10 месяцев.

Занятия по математике и физике на очных подготовительных курсах проводятся следующим образом. Абитуриентам читаются лекции по основным разделам курса, при этом основное внимание уделяется вопросам, часто вызывающим затруднения при ответах на экзаменах. По каждой пройденной теме регулярно проводятся практические занятия, на которых рассматриваются типовые задачи по данному разделу, а затем сдается «домашнее задание», состоящее из 20—25 задач, которые следует решить, и списка теоретических вопросов, которым надо уделить особое внимание. «Прием домашнего задания» по форме близок к вузовскому коллоквиуму.

Два раза в год (в январе — феврале и в мае) слушатели подготовительных курсов сдают письменные и устные зачеты. Эти зачеты проходят в обстановке, близкой к экзаменационной. Билеты зачетов составлены по типу экзаменационных, принимают зачеты члены предметных комиссий. Все это является хорошей психологической подготовкой будущих абитуриентов, помогает им оценить уровень требований на вступительных экзаменах в вуз, выявить недостатки в своих знаниях и своевременно принять меры к их устранению. Варианты трех билетов весеннего письменного зачета по математике и задачи из билетов зачета по физике приводятся в конце статьи.

Прием на очные подготовительные курсы начинается 1 сентября и продолжается до 1 июля (на разные потоки). Поступающие на курсы предоставляют документ о среднем образовании или справку с места учебы, справку с места работы (для работающей молодежи), одну фотографию, квитанцию почтового отделения связи о перечислении 26 р. на расчетный счет института.

Поступившим на заочные курсы институт высылает методические пособия по математике, физике, русскому языку и литературе, а также контрольные работы. Контрольная работа состоит из ответов на теоретические вопросы и решения задач. Изучение каждой темы заканчивается контрольной работой, которую слушатель должен выслать в указанные графиком сроки в институт (две контрольные работы по математике и физике приведены в конце статьи).

В процессе выполнения контрольной работы слушатель может обращаться к преподавателям с вопросами теоретического и практического характера, а также посещать раз в месяц консультации (при наличии такой возможности).

Учащиеся заочных курсов, выполнившие контрольные работы, приглашаются перед экзаменами на очные курсы. Занятия проводятся ежедневно, кроме воскресенья, с 1-го по 31-е июля (абитуриенты обеспечиваются общежитием).

Для поступления на заочные курсы необходимо выслать в адрес курсов заявление на имя ректора. После этого вы получите подробную инструкцию о приеме на курсы. Наш адрес: *Москва, 113114, Шлюзовая набережная, дом 8, МИСИ, комн. 225а, подготовительные курсы. Телефон: 235-25-17.*

Математика
Очный зачет

Вариант 1

1. Найти производную функции

$y=3\log_6(2x+1)-\frac{1}{x^3}$ в точке $x=1$.

2. На кривой $y=4x^2-6x+3$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой $y=2x$.

3. Найти промежутки монотонного возрастания и убывания функции $y=\frac{x}{x-2}$.

4. Найти для функции $y=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^3$ первообразную, график которой проходит через точку $(-1;\ 1)$.

5. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 45°. Сторона основания равна l. Определить площадь боковой поверхности призмы.

6. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Найти $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$.

Вариант 2

1. Найти производную функции
$$y=(4x^2+3)^3-2\ln x.$$

2. Определить, существует ли на графике функции $y=x^3-x^2+3x-2$ точка, в которой касательная параллельна прямой $y=x$.

3. Данное положительное число a разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y=2x+3$ и параболой $y=x^2$.

5. Показать, что биссекторы трех двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$.

Вариант 3

1. Найти производную функции $y=\sin\sqrt{1+x^2}$.

2. Закон движения точки по оси Ox есть $x(t)=3t-t^3$. Найти скорость $v(t)$ движения точки в момент $t_0=0$, $t_1=1$ (x измеряется в сантиметрах, t в секундах).

3. Исследовать на экстремум функцию
$$y=2x^3+3x^2-12x+5.$$

4. Найти для функции
$$y=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$$
первообразную, график которой проходит через точку $(0;\ 1)$.

5. Найти углы треугольника ABC, имеющего наибольшую возможную площадь, если даны основание $|BC|=a$ и величина противолежащего угла $\widehat{BAC}=\alpha$.

6. Даны три точки: $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 2;\ -1)$, $C(3;\ 1;\ 0)$. Найти величину угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Заочные курсы

Контрольная работа № 1

1. Найдите целочисленные решения системы неравенств
$$\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{x-4}{3}>2x-1,\\ 2x-\frac{x-5}{3}>x-3.\end{cases}$$

2. В двузначном числе цифра единиц на 1 меньше цифры десятков. Если к этому числу прибавить 7, то полученная сумма будет больше 19, но меньше 51. Найдите это двузначное число.

3. Решите неравенства: а) $x^2-3x+11<0$; б) $-16x^2+24x-9\geqslant 0$.

4. Покажите штриховкой множество точек $M(x;\ y)$ координатной плоскости, для которых $|x|+|y|\leqslant 2$.

5. Покажите штриховкой множество точек $M(x;\ y)$ координатной плоскости, для которых
$$\begin{cases}3x-4y+12>0,\\ x+y-2<0.\end{cases}$$

6. Найти производные следующих функций: а) $y=\operatorname{tg}x\cdot 4^x+\operatorname{ctg}3x$; б) $y=\sqrt{2x+3x^2}-3\sin x$; в) $y=\frac{4\cos(3x+2)}{x^4}$.

7. Найти значение производной функции $y=\sin 2x+4x^3$ в точке $x=\pi/3$.

8. Найти области возрастания и убывания следующих функций: а) $y=(x+4)^3$; б) $y=1-4x-x^2$; в) $y=x/3-\sqrt[3]{x}$.

9. Исследуйте функцию $y=(x-2)^2\times(x+1)^3$ и постройте ее график.

10. Турист, поднимаясь в гору, за первый час достиг высоты 800 м, а за каждый следующий час проходил на 25 м меньше (по высоте), чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты 5700 м?

11. Известно, что сумма первых n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n=4n^2-3n$. Напишать три первых члена этой прогрессии.

12. Найти число членов конечной геометрической прогрессии, у которой первый, второй и последний члены 3, 12 и 3072.

13. Упростить выражение $\cos 20°+\cos 40°+\cos 60°+\ldots+\cos 160°+\cos 180°$.

14. Доказать тождество
$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=1.$$

15. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги в 60° и 120°. Найти отношение площадей этих кругов.

16. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь его равна 24 см². Найти площадь описанного круга.

Контрольная работа № 2

1. Может ли функция, имеющая максимум (минимум), не иметь наибольшего (наименьшего) значения? Может ли функция, имеющая наибольшее (наименьшее) значение, не иметь максимума (минимума)?

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x$ на промежутке $[-3; 4]$.

3. Найти число, которое, будучи сложенным со своим квадратом, дает наименьшую сумму.

4. Кусок проволоки длины a согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь последнего была наибольшей.

5. Найдите первообразные следующих функций: в) $y = 1/x + x^3 + \cos 2x$; б) $y = 1/\cos^2 x - 5x - 2/3$; в) $y = \dfrac{1}{ax+b}$ (a и b — постоянные); г) $y = \dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

6. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = e^x$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс.

8. Решите следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 3x + y + 2z = 7, \\ 2x + 3y + z = 2. \end{cases}$

9. Найти множество решений следующих систем:

б) $\begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + y^2 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1. \end{cases}$

10. Длина отрезка перпендикуляра, заключенного между двумя параллельными плоскостями, равна 4 м, наклонной — 6 м. Расстояние между их концами в каждой плоскости равно по 3 м. Найти расстояние между серединами перпендикуляра и наклонной.

11. Расстояние от точки M, лежащей вне плоскости данного прямого угла, до его вершины B равно a, а до каждой из сторон — b. Чему равно расстояние от точки M до плоскости прямого угла?

12. Доказать, что если из вершины угла, лежащего на плоскости, провести наклонную к плоскости так, чтобы она составляла со сторонами угла конгруэнтные углы, то проекция этой наклонной будет биссектрисой данного угла.

Физика

Задачи очного письменного зачета

1. Свободно падающее тело в последнюю секунду проходит половину всего пути. Определить время падения и высоту падения.

2. Груз массой 50 кг придавливается к вертикальной стенке силой 98 Н. Какая необходима сила, чтобы равномерно тянуть груз вертикально вверх и чтобы удержать его в покое, если коэффициент трения 0,3?

3. Тележка массой 120 кг движется по инерции по горизонтальной плоскости со скоростью 6 м/с. С тележки соскакивает человек массой 80 кг под углом $\alpha = 30°$ к направлению ее движения. Скорость тележки уменьшается при этом до 4 м/с. Какова была скорость прыжка?

4. Три однородных шара массой $m_1 = 0{,}1$ кг, $m_2 = 0{,}2$ кг и $m_3 = 0{,}3$ кг укреплены на невесомом стержне таким образом, что центры первого и второго, а также второго и третьего находятся на расстояниях $d = 0{,}3$ м друг от друга. На каком расстоянии от центра третьего шара находится центр тяжести системы?

5. Шар массой 5 кг висит на веревке, прикрепленной к гладкой стене (рис. 1). Определить силу натяжения веревки и силу давления шара на стену. Нить образует со стеной угол $\alpha = 15°$.

6. В цилиндрический сосуд налиты вода и ртуть в равных по массе количествах. Общая высота двух слоев жидкости 29 см. Определить давление жидкости на дно сосуда. Плотность ртути 13,6 г/см³.

7. Пузырек воздуха поднимается с глубины 140 м до поверхности воды. Во сколько раз увеличится при этом его объем, если атмосферное давление 10^5 Н/м², температура у поверхности воды 23°С, а на глубине 140 м 7°С?

8. В лед при 0°С попадает пуля, летящая со скоростью 770 м/с. Масса пули 10 г. Считая, что 50% кинетической энергии пули идет на плавление льда, найти массу растаявшего льда. Удельная теплота плавления льда $3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

9. Электрон, пролетая в электрическом поле из точки A в точку B, увеличил свою скорость с 800 км/с до 4000 км/с. Определить разность потенциалов между точками A и B электрического поля. Отношение заряда электрона к его массе $e/m = 1{,}76 \times 10^{11}$ Кл/кг.

10. Большая шарообразная капля воды получена в результате слияния 125 одинаковых мелких шарообразных капелек. До какого потенциала были заряжены мелкие капельки, если потенциал большой капли оказался равным 2,5 В?

11. Определить сопротивление цепочки между точками A и B (рис. 2). Сопротивление каждого звена r.

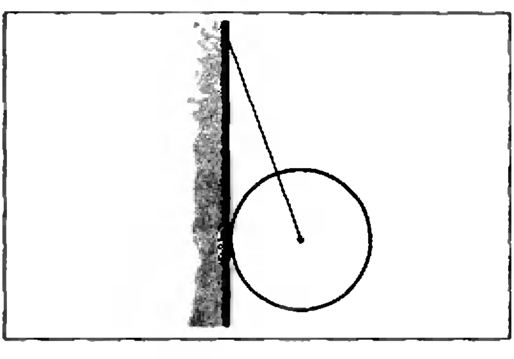


Рис. 1.

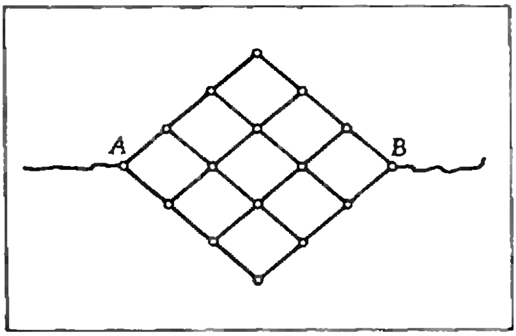


Рис. 2.

12. Электрический чайник, содержащий 1 л воды, подключен к генератору с э. д. с. 120 В и внутренним сопротивлением 4 Ом. На сколько градусов нагреется вода за 1 мин, если вольтметр, подключенный к клеммам генератора, показывает напряжение 110 В? К. п. д. чайника 70%. Током через вольтметр пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_в=4190$ Дж/(кг·К).

13. Переменный ток возбуждается в рамке из 200 витков с площадью витка 300 см^2, вращающейся в магнитном поле с индукцией $1{,}5\cdot10^{-2}$ Т. Определить э. д. с. индукции через 0,01 с после начала движения рамки из нейтрального положения. Амплитудное значение э. д. с. равно 7,2 В.

14. Водолазу, находящемуся под водой, кажется, что Солнце находится на высоте $\alpha=60°$ над горизонтом. Определить действительную высоту β Солнца над горизонтом, если показатель преломления воды относительно воздуха $n = 4/3$.

15. Определить красную границу фотоэффекта для никеля, если для него работа выхода электрона равна 5 эВ. Указать, в какой области спектра лежит эта граница.

Заочные курсы

Контрольная работа № 1

1. Два автомобиля выходят из одного пункта и движутся в одном направлении. Второй автомобиль выходит на 20 с позже первого. Оба движутся равноускоренно с ускорением 0,4 м/с^2. Через какое время, считая от начала движения второго автомобиля, расстояние между ними окажется равным 240 м?

2. Свободно падающее тело проходит в последнюю секунду половину своего пути. Определить время падения и высоту падения.

3. Автомобиль массой 2 т движется в гору, уклон которой равен 1 м на длину 10 м. Коэффициент трения 0,08. Определить: а) работу, совершаемую двигателем автомобиля на пути 5 км; б) мощность, развиваемую двигателем, если этот путь пройден за 10 мин.

4. Подсчитать силу тяги локомотива, сообщающего составу массой 2500 т ускорение 5 см/с^2. Сила сопротивления движению составляет 0,005 веса состава.

5. Клетка подъемной машины массой 300 кг удерживается канатом. Найти силу натяжения каната, если клетка движется вертикально вверх: а) равноускоренно с ускорением 1,2 м/с^2; б) равномерно; в) равнозамедленно с ускорением — 1 м/с^2.

6. Подъемный кран в течение восьмичасового рабочего дня должен поднять 3000 т строительных материалов на высоту 9 м. Какова мощность двигателя крана, если коэффициент полезного действия установки 60%?

7. Конькобежец движется по окружности со скоростью 12 м/с. Радиус окружности 50 м. Под каким углом к горизонту он должен наклониться, чтобы сохранить равновесие?

Контрольная работа № 2

1. Поле создано в воздухе двумя одноименными точечными зарядами, каждый из которых равен $4\cdot10^{-7}$ Кл. Расстояние между зарядами равно 8 см. Найти напряженность поля в точке, отстоящей от середины отрезка, соединяющего заряды (по перпендикуляру) на расстоянии 3 см.

2. Два одинаковых шарика подвешены в воздухе на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После того, как каждому из шариков был сообщен заряд $1\cdot10^{-7}$ Кл, шарики разошлись на угол $2\alpha=60°$. Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра каждого шарика $l=0{,}2$ м.

3. Электронный луч, проходя между обкладками конденсатора путь 5 см, отклоняется на 1 мм. Определить среднюю скорость электронов в луче. Напряженность электрического поля между обкладками конденсатора 150 В/м. Заряд электрона $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, масса электрона $9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

4. Точечный заряд в 15 ед. заряда СГСЭ находится на расстоянии 0,45 м от поверхности шара диаметром 10 см, заряженного до потенциала 2400 В. Какую работу надо совершить, чтобы уменьшить расстояние между ними на 40 см?

5. Колхозная гидроэлектростанция питает током электродвигатель, работающий при токе 12 А. Сколько (по массе) пойдет железного провода на оборудование линии, подводящей ток, если расстояние от станции до двигателя 0,5 км, а потеря напряжения в подводящих проводах не превышает 40 В?

6. Два элемента соединены параллельно. Первый элемент имеет э. д. с. 2 В, второй — 1,5 В. Внутреннее сопротивление каждого элемента равно 0,5 Ом. Сопротивление внешней части цепи 2 Ом. Найти ток в каждом элементе и во внешней части цепи. Какова будет величина тока во внешней части цепи, если второй элемент выключить?

7. Желая проверить показания амперметра, его включили последовательно с электролитической ванной. При постоянном режиме тока за 20 мин выделилось 1300 мг серебра. Амперметр показывал 0,8 А. Верно ли показание амперметра?

8. Электрическая печь в течение 1 мин выделяет 57,6 ккал тепла. Выразить ее мощность в киловаттах, подсчитать расход электрической энергии за 8 ч работы и стоимость израсходованной энергии при тарифе 4 коп. за 1 кВт·ч.

9. Полагая свободный пробег электрона в воздухе при нормальном давлении равным 0,005 мм, определить напряженность поля, при которой может произойти ионизация ударом. Для совершения ионизации электрон должен обладать энергией $24\cdot10^{-12}$ эрг.

Спрашивайте — отвечаем

Редакция «Кванта» получила письмо от читательницы Елены Гликиной из города Северодонецка Ворошиловградской области. Вот что она пишет:

«Мне случилось встретиться с таким интересным парадоксом. Беру уравнение

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2; \qquad (1)$$

его можно переписать в виде $x^2=2$, откуда $x=\sqrt{2}$, а потому

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2. \qquad (2)$$

Беру другое уравнение:

$$y^{y^{y^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=4; \qquad (3)$$

его можно переписать в виде $y^4=4$, откуда $y=\sqrt{2}$, а потому

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=4. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что $2=4$. Я прошу объяснить причину столь парадоксального равенства...»

Нам кажется, что подумать над этим письмом будет полезно всем нашим читателям. Именно поэтому мы помещаем на страницах журнала и само письмо, и ответ на поставленный в нем вопрос. Не спешите, однако, прочитать ответ — сначала попытайтесь разобраться в причинах появления «столь парадоксального равенства» самостоятельно.

Итак, цепочка рассуждений привела нас к равенству $2=4$. Ложность полученного равенства не вызывает сомнений, а потому нужно искать ошибку. Проведем детальный логический анализ каждого сделанного шага, обращая особое внимание на законность каждого логического перехода. Одни из этих переходов основаны на общих законах логики или математики, другие связаны с конкретными особенностями рассматриваемой задачи.

Например, на последнем шаге нашего рассуждения мы из равенств (2) и (4) выводим, что $2=4$. При этом мы опираемся, очевидно, на следующее свойство: *если $a=b$ и $a=c$ — истинные равенства, то и $b=c$ — истинное равенство.* Это свойство мы, естественно, подвергать сомнению не будем.

Но следствие $2=4$ все-таки ложно, и поэтому неверно, по крайней мере, одно из равенств (2), (4).

Рассмотрим более внимательно равенство (2). Оно получилось в результате подстановки в уравнение (1) значения $x=\sqrt{2}$, найденного при решении этого уравнения. Однако, если $\sqrt{2}$ — корень уравнения (1), то равенство (2), конечно, справедливо — в силу самого определения корня. Таким образом, нужно проверить, действительно ли число $\sqrt{2}$ является корнем уравнения (1).

Решение уравнения (1), если говорить подробнее, проводилось так: пусть число a — корень уравнения (1), т. е. пусть

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2. \qquad (5)$$

Перепишем равенство (5) в виде

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2. \qquad (6)$$

Тогда в силу того же равенства (5) заключаем, что $a^2=2$. Это равенство выполняется при значении $a=\sqrt{2}$, которое и объявляется корнем уравнения (1).

Все ли удовлетворяет нас в таком решении? Очевидно, нет: уравнение $x^2=2$ есть с л е д с т в и е исходного уравнения (1), и потому нужно провести п р о в е р к у с помощью, например, непосредственной подстановки значения $\sqrt{2}$ в уравнение (1) [отсутствие проверки является в приведенном решении существенным пробелом].

Для проведения проверки необходимо выяснить, действительно ли значение левой части уравнения (1) при $x=\sqrt{2}$ равно 2. Однако после подстановки мы приходим к левой части равенства (2), которая, с точки зрения школьных определений, не имеет смысла: в школе мы имеем дело лишь с результатом к о н е ч н о г о числа операций возведения в степень, а потому равенство (2) просто бессмысленно. Равенство (4), конечно, столь же бессмысленно, и не удивительно, что использование этих двух «равенств» привело к неверному равенству $2=4$.

Возникших логических трудностей сразу можно было бы избежать, если бы с самого начала посмотреть на уравнение (1) внимательно. Действительно, подставляя в его левую часть любое число, например, $x=2$ или $x=1/2$, мы получаем выражение, содержащее бесконечное число возведений в степень и потому не имеющее смысла. Попробуйте, например, ответить на вопрос, что такое

$$2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

Между тем примеры, содержащие бесконечное число операций, встречаются в некоторых задачниках для поступающих и, к сожалению, даже в вариантах вступительных экзаменов.

В математике часто встречаются выражения, содержащие бесконечное число операций. Но для таких выражений всегда предварительно даются четкие определения. Новая школьная программа дает возможность в некоторых случаях приписать смысл сумме бесконечного числа слагаемых *(бесконечного ряда)*

$$x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots$$

(см. учебник «Алгебра и начала анализа 9», с. 67—68), а также и многим другим бесконечным выражениям.

С помощью понятия предела можно, например, естественным образом придать смысл выражению

$$A=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}} \qquad (7)$$

Именно, рассмотрим последовательность $\{x_n\}$

$$x_1=\sqrt{3},\ x_2=\sqrt{3\sqrt{3}},$$

$$x_3=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}},\ \ldots$$

и будем понимать выражение (7) как предел этой последовательности:

$$A=\lim_{n\to\infty}x_n$$

(если, конечно, этот предел существует). Покажем, что он действительно существует. Поскольку

$$x_n=3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}\cdot\ldots\cdot3^{\frac{1}{2^n}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

в силу непрерывности показательной функции $y=3^x$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}=3.$$

Следовательно, выражение (7) имеет смысл и равно 3.

Попробуем теперь придать смысл выражению

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}, \qquad (8)$$

для чего, естественно, используем понятие предела. Рассмотрим последовательность

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}},\ \ldots \qquad (9)$$

В статье А. Егорова «Уравнения и пределы» (с. 34) доказано, что уравнение

$$(\sqrt{2})^x=x \qquad (10)$$

имеет ровно два корня (поскольку $1<\sqrt{2}<1{,}42<e^{\frac{1}{e}}$) и последовательность (9) сходится к меньшему из этих корней. Корни уравнения (10) легко найти подбором: $x_1=2$, $x_2=4$. Следовательно, предел последовательности (9) равен 2, и если выражению (8) придать указанный выше смысл, то верно равенство (2), а (4) — неверно.

Г. Дорофеев, Н. Розов

Настольная книга по астрономии

Тридцать лет назад на прилавках книжных магазинов появилась книга известного советского астронома профессора Московского университета Бориса Александровича Воронцова-Вельяминова «Вселенная». Это первая обстоятельная советская научно-популярная книга о Вселенной. Она быстро исчезла с книжных прилавков и приобрела заслуженную любовь читателей. С тех пор книга неоднократно переиздавалась. В 1976 году издательство «Наука» выпустило седьмое, переработанное и дополненное, издание этой книги под названием «Очерки о Вселенной».

Тридцать лет, которые прошли с момента выхода первого издания книги, были периодом необычайного расцвета астрономической науки. В этот период родилась новая область астрономии — радиоастрономия, которая освоила второе «окно прозрачности» в спектре электромагнитных излучений и добавила к оптической информации о небесных телах и явлениях громадное количество сведений, доставленных радиоволнами в сантиметровом и дециметровом диапазонах.

Двадцать лет назад, с запуска первого советского искусственного спутника Земли, началась новая эра в изучении космического пространства. Подняв за пределы земной атмосферы сложную научную аппаратуру, астрономы получили возможность регистрировать все виды электромагнитных излучений и космических частиц, рождающихся в глубинах космоса.

Можно с уверенностью утверждать, что в эти три десятилетия наука узнала о космосе больше, чем за всю предыдущую историю астрономии. Квазары, пульсары и «черные дыры», ядра галактик и взрывающиеся галактики, реликтовое излучение и солнечный ветер — со множеством удивительных небесных объектов и явлений мы познакомились впервые. Рассказать обо всем этом одинаково подробно в одной книге практически невозможно. Это и заставило автора назвать последнее издание книги более скромно — «Очерки о Вселенной».

Правда, это вовсе не означает, что автор рассказывает только о каких-то отдельных интересных проблемах современной астрономии. По существу, книга Б. А. Воронцова-Вельяминова является своеобразной научно-популярной энциклопедией наших знаний о Вселенной. Она охватывает все разделы современной астрономической науки.

Во введении автор знакомит читателей с основными средствами астрономических наблюдений — оптическими телескопами, спектрографами, радиотелескопами и радиолокаторами, а также с методами регистрации частиц высоких энергий.

Первая часть книги посвящена миру твердого вещества. В ней рассказывается о больших и малых планетах Солнечной системы, о кометах, метеоритах и метеорных дождях. Во второй части, которую автор назвал «Мир газа», идет речь о Солнце, звездах и галактиках. Особенно хороша глава о туманностях, изучению которых Б. А. Воронцов-Вельяминов посвятил многие годы своей жизни. Попутно автор сообщает множество интереснейших подробностей, связанных с открытием и исследованием этих небесных объектов.

В последних главах второй части рассматриваются рождение, эволюция и смерть звезд, а также происхождение Солнечной системы. Не обходит вниманием автор и сложные философские проблемы, касающиеся изучения Вселенной. Им посвящено несколько специальных параграфов («От атомного ядра до Метагалактики», «Есть ли граница мира и что за ней?», «Возможна ли связь с цивилизациями других планет?» и т. д.).

Книга «Очерки о Вселенной» во многом оригинальна. В нее, например, включены стихи друга автора поэта А. А. Коваленкова. В книге много юмора, шуток, образных сравнений, воспоминаний автора. Он часто ведет с читателями откровенный разговор, не скрывая своего личного отношения к обсуждаемым проблемам.

Книга Б. А. Воронцова-Вельяминова хорошо известна всем астрономам. У многих из них именно она, прочитанная в юные годы, пробудила интерес к серьезным занятиям астрономией.

Научный уровень книги очень высок — в ней нет каких-либо ошибок, устаревших или отвергнутых наукой взглядов и фактов. Она во всех своих частях представляет читателям действительно современную астрономию. Но стиль и характер изложения сложных научных достижений таковы, что книга вполне доступна школьникам старших классов. И если кто-то захочет поближе познакомиться с разгаданными и неразгаданными тайнами Вселенной, трудно найти для этого более подходящую книгу.

Чтобы дать читателям возможность самим убедиться в правоте сказанного выше, мы приводим здесь текст небольшого параграфа из рецензируемой книги. Он называется, казалось бы, несколько странно — «Есть ли жизнь на Земле?». По этому поводу автор пишет: «Такой вопрос представляется не только излишним, но и странным. Мы-то знаем, что жизнь вокруг нас на Земле существует! Но такой вопрос могут задавать себе разумные жители других миров так же, как мы задаем вопрос, есть ли жизнь на Марсе или на других небесных телах.

А как они могут найти ответ на этот вопрос?

Конечно, мы выясняем физические условия на планетах, сравниваем их с земными и на основании этого заключаем, может ли быть на них жизнь, сходная с земной. Научное решение вопроса может опираться только на опыт наблюдения жизни на нашей Земле. Научно можно мыслить жизнь только на той же основе, какая известна на Земле. Например, мы знаем, что живой белок — основа развитой жизни — при высокой температуре свертывается. Но ...нельзя полностью поручиться за пределы возможного приспособления жизни и даже за возможность жизни на других основах. Мы будем говорить здесь о непосредственно видимых следах разумной деятельности. Их в принципе можно видеть с более далеких расстояний, чем сами разумные существа. Лучшие снимки поверхности Марса, полученные на последних космических аппаратах с высоты менее 2 000 километров и позволяющие различить образования размером от нескольких сотен метров, не показывают следов разумной деятельности. Пусть разумной жизни на Марсе нет, это почти несомненно. Но насколько видна издали разумная деятельность, заведомо существующая на Земле? Этот вопрос полезно выяснить, и им занялся американский ученый Саган.

В 1966 году он и его сотрудники просмотрели огромное число фотографий Земли, полученных с метеорологических спутников и дававших разрешение до 2—0,2 километра. Можно было ожидать, что наиболее заметными следами разумной деятельности при этом будут сезонные изменения вида больших, правильно ограниченных полей, засеянных сельскохозяйственными культурами. Но контрастность их изображений мала, а их сезонные изменения маскируются изменениями угла падения солнечного света и угла, под которым сделан снимок.

Более обещающими являются большие искусственные сооружения прямолинейного вида —дороги, мосты, плотины, следы за кормой кораблей в море или белые полосы, оставляемые самолетами. Их следы разыскивались на тысячах снимках, свободных от облаков.

Было найдено лишь одно четкое указание на техническую культуру: яркая линия только что законченного отрезка автострады. Более сомнительно изображение в районе узкого пролива между Канадой и Гренландией. Оно состояло из длинных полосок — белой и черной, тянущихся параллельно друг другу над покровом облаков. Возможно, что это был след самолета и его тени или облако, оставленное реактивным самолетом. Еще одним следом человеческой деятельности была белая сетка просек в лесу, на которые выпал свежий снег.

Авторы заключили, что если бы воображаемые марсиане имели снимки Земли в таком же количестве и такого качества, какие были получены «Маринером-4» — первой автоматической станцией, пролетевшей над поверхностью Марса на высоте 12 000 километров, то по ним нельзя было бы найти никаких признаков разумной жизни на нашей планете.»

Мы закончим нашу рецензию самым маленьким параграфом из этой книги. Он называется: «Ваш адрес в безграничной Вселенной». «Подведем итог развитию наших знаний о месте Человека во Вселенной, насколько мы представляем себе сейчас ее строение. Представим этот итог в виде вашего адреса, уважаемый Читатель:

Безграничная Вселенная
«Наша» Метагалактика
Местное скопление галактик
Наша Галактика
Звездное облако «Местная система»
«Наша» Солнечная система
Планета Земля
Советский Союз
РСФСР (или др.)
Город
Улица
дом №
Квартира №
Гр. ...»

Остается только добавить, что эта книга удостоена первой премии на проходившем в 1977 году Всесоюзном конкурсе Общества «Знание» на лучшую научно-популярную книгу.

В. Рудов

Задачи наших читателей

1. Решить уравнение

$$\sin^2 1917x + \frac{1}{4}\sin^2 1977x = \sin 1917x \cdot \sin^2 1977x.$$

А. Аляев (Пензенская обл.)

2. Пусть S — площадь треугольника ABC, $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, G_a, G_b, G_c — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно, h_a, h_b, h_c — длины высот, опущенных на эти же стороны или их продолжения. Докажите, что

а) $$S = \frac{1}{2}\left(ab\,|G_aG_b|^2 + bc\,|G_bG_c|^2 + ac\,|G_aG_c|^2\right)^{1/2};$$

б) $$S = \frac{1}{2}\left(\frac{|G_aG_b|^2}{\sin\hat{C}} + \frac{|G_bG_c|^2}{\sin\hat{A}} + \frac{|G_aG_c|^2}{\sin\hat{B}}\right);$$

в) $$\frac{|G_aG_b|^2}{h_ah_b} + \frac{|G_bG_c|^2}{h_bh_c} + \frac{|G_aG_c|^2}{h_ah_c} = 1.$$

У. Алла (г. Выру)

3. Сумма двух двузначных чисел вдвое больше третьего, у которого число десятков равно числу десятков первого числа, а число единиц — числу единиц второго.

Доказать, что все эти числа равны друг другу.

М. Штеренберг (г. Саратов)

4. Найти однозначные числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{x^y} = \frac{x+y}{1000}.$$

И. Михалкович (Минская обл.)

5. Найти все натуральные n, при которых справедливо неравенство

$$9^n + 10^n > 12^n.$$

В. Федотов (г. Петрозаводск)

К статье «Подготовительные курсы при МИСИ»

Математика

Вариант 1

1. $\frac{2}{\ln 5}+3$. 2. (1; 1). 3. Функция монотонно убывает на промежутках $]-\infty; 2[$ и $]2;\infty[$. 4. $\frac{x^7}{7}+\frac{3x^4}{4}+3x-\frac{1}{2x^2}+\frac{109}{28}$. 5. $3\sqrt{3}\,l^2$. 6. $\vec{0}$.

Вариант 2

1. $24x\cdot(4x^2+3)^2-\frac{2}{x}$. 2. Нет 3. $a=a/2+a/2$. 4. 32/3. 6. $\vec{AB}=(\vec{a}-\vec{b})/2$, $\vec{BC}=(\vec{a}+\vec{b})/2$, $\vec{CD}=(\vec{b}-\vec{a})/2$, $\vec{DA}=-(\vec{a}+\vec{b})/2$.

Вариант 3

1. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\cos\sqrt{1+x^2}$. 2. $v(0)=3$ см/сек, $v(1)=0$ см/сек. 3. $y_{max}=25$, $y_{min}=-2$. 4. $x-\cos x+2$. 5. $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=(\pi-\alpha)/2$. 6. $\varphi=\pi/3$.

Контрольная работа № 1

1. $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$. 2. 21, 32, 43. 3. а) $\varnothing$; б) $x=3/4$. 4. Квадрат с вершинами $A(0;\ 2)$, $B(-2;\ 0)$, $C(0;\ -2)$, $D(2;\ 0)$. 5. Угол с вершиной $A(-4/7;\ 18/7)$, содержащий начало координат. 6. а) $\frac{4^x}{\cos^2 x}+\operatorname{tg} x\cdot 4^x\cdot\ln 4-\frac{3}{\sin^2 x}$; б) $\frac{1+3x}{\sqrt{2x+3x^2}}-3\cos x$; в) $\frac{-16\cos(3x+2)-12x\sin(3x+2)}{x^5}$.

7. $-1+4\pi^2/3$. 8. а) функция возрастает на **R**; б) $]-\infty; -2]$ — возрастает, $[-2; \infty[$ — убывает; в) $]0; 1]$ — убывает, $[1;\infty[$ — возрастает. 10. 8 часов. 11. 1, 9, 17. 12. 6. 13. -1. 15. 3 : 1. 16. 25π см^2.

Контрольная работа № 2

1. Да. 2. $y(4)=40$, $y(-3)=-9$. 3. $-1/2$. 4. Квадрат со стороной $a/4$. 5. а) $\ln|x|+x^4/4+\sin 2x/2+C$; б) $\operatorname{tg} x+5x^2/2-2x/3+C$; в) $\ln|ax+b|/a+C$; г) $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$. 6. $e-1$. 7. 32/3. 8. а) $x=1$, $y=2$, $z=3$; б) $x=2$, $y=-1$, $z=1$. 9. а) $x\in\ ]-\infty;0[\ \cup\ ]0;\infty[$, $y=x^2$; б) координаты точек кольца, ограниченного окружностями с центром в начале координат радиусов 1 и 2. 10. 2 м. 11. $\sqrt{2b^2-a^2}$.

Физика

Задачи очного письменного зачета

1. $t\approx 3{,}4$ с; $h\approx 57$ м. 2. $|\vec{F}_1|\approx 520$ Н; $|\vec{F}_2|\approx 460$ Н. 3. $|\vec{v}|=10{,}4$ м/с. 4. $x=0{,}2$ м. 5. $|\vec{F}_H|\approx 51$ Н; $|\vec{F}_g|\approx 13$ Н. 6. $p\approx 5{,}3\cdot 10^3$ Н/м^2. 7. $\approx$ в 15,8 раз. 8. ≈ 4 г. 9. $\Delta\varphi_{AB}\approx -43{,}6$ В. 10. $\varphi_0=0{,}1$ В. 11. $R_{AB}=13/7\ r$. 12. $\Delta T\approx 3$ К. 13. $\mathscr{E}=5{,}1$ В. 14. $\beta=48°$. 15. $\lambda\approx 2{,}5\times 10^{-7}$ м; красная граница фотоэффекта лежит в ультрафиолетовой области спектра.

Заочные курсы

Контрольная работа № 1

1. $t=20$ с. 2. $t\approx 3{,}4$ с; $h\approx 57$ м. 3. $A\approx 2\cdot 10^7$ Дж; $N\approx 3{,}4$ кВт. 4. $|\vec{F}|=2{,}5\cdot 10^5$ Н. 5. а) $|\vec{F}|=3360$ Н; б) $|\vec{F}|=3000$ Н; в) $|\vec{F}|=2700$ Н. 6. $N\approx 15{,}6$ кВт. 7. $\alpha\approx 74°$.

Контрольная работа № 2

1. $|\vec{E}|\approx 0{,}27$ В/м. 2. $m\approx 40$ г. 3. $|\vec{v}|\approx 5{,}7\cdot 10^6$ м/с. 4. $A=48$ эрг. 5. $m\approx 281$ кг. 6. $I_1\approx 0{,}89$ А; $I_2\approx 0{,}11$ А; $I\approx 0{,}78$ А; $I'=0{,}8$ А. 7. Амперметр показывал меньше. 8. $P=4$ кВт; $W=32$ квт·ч; 1 р. 28 коп. 9. $|\vec{E}|=3\cdot 10^6$ В/м.

К задачам «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. 4 рубля 26 копеек. 2. Порция Андрея на 1 копейку дороже (она получается из порции Виктора, если в ней заменить 25 г шоколадного мороженого пломбиром). 3. $5S$. 4. Вспомните правило рычага.

Над номером работали:
А. Виленкин, Н. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Г. Красиков, В. Машатин, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова, Э. Смирнов

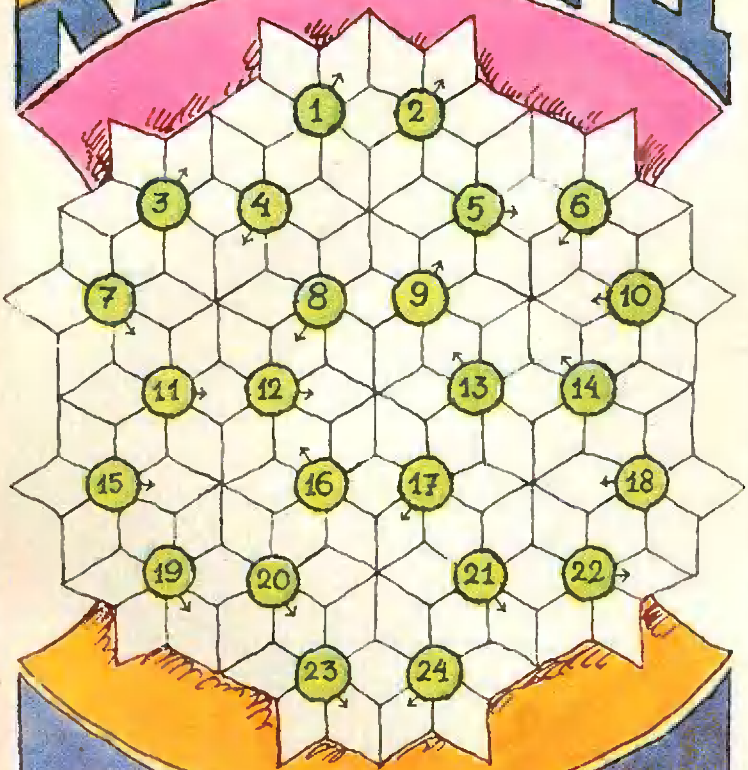
Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Медведская М. Л.
113035, Москва, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 25/VII-77 г
Подписано в печать 7/IX-77 г
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 625 Т-16411
Цена 30 коп. Заказ 1641 Тираж 290 135

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

Кроссворд



Каждое слово из шести букв вписывается по часовой стрелке вокруг номера, под которым оно стоит, начиная с клетки, отмеченной стрелкой.

1. Основа естествознания. 2. Наиболее распространенный изотоп водорода. 3. Летательный аппарат с реактивным двигателем. 4. Положительный ион. 5. Электронная лампа. 6. Раздел физики. 7. Наиболее удаленная от центра Земли точка орбиты искусственного спутника. 8. Вспомогательная шкала, по которой отсчитывают доли делений основной шкалы какого-либо средства измерения. 9. Планета Солнечной системы. 10. Греческая буква. 11. Советский физик — лауреат Нобелевской премии. 12. Общее название протона и нейтрона. 13. Четвертое состояние вещества. 14. Единица электрической емкости. 15. Единица силы. 16. Одновременное звучание нескольких звуков одной частоты. 17. Русский физик XVIII века. 18. Сильно разреженный газ. 19. Итальянский физик, создавший первый источник постоянного тока. 20. Неподвижная часть электрических машин. 21. Безмоторный летательный аппарат. 22. Сплав, который применяется для изготовления нагревательных элементов. 23. Астрономическая единица длины. 24. Часть оптического прибора.

Д. Ишонкулов

18 Головоломка

Как разделить число 18 пополам, чтобы получилась единица?

И. Михалкович

Квадраты из пентамино

1. Любую из 12 фишек пентамино (см. рис. 1) кроме «креста» можно разрезать на квадрат 1×1 и два прямоугольника 2×1. Если эти прямоугольники разрезать по диагонали, то из полученных пяти кусков можно сложить квадрат (рис. 2).

На какое наименьшее число кусков и как надо разрезать «крест», чтобы из него можно было сделать квадрат?

Какие пентамино можно разрезать на 3 куска, из которых можно сделать квадрат?

2. Разбейте эти же 12 фишек пентамино на три группы по 4 фишки в каждой и сложите из каждой группы по квадрату, разрезая на части не более 2 фишек из каждой группы.

На какое (наименьшее) число частей придется для этого разрезать отобранные фишки?

Л. Мочалов

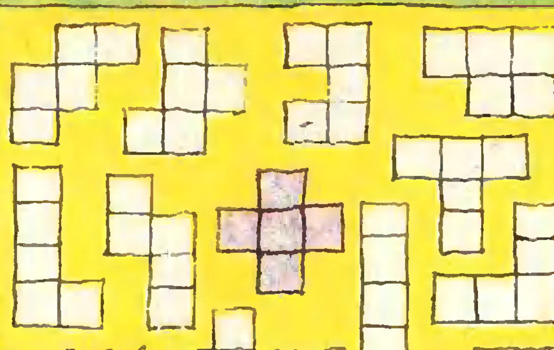


Рис. 1

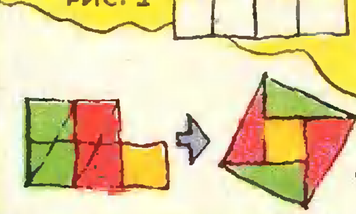


Рис. 2

„Человечество не останется вечно на Земле, но, в погоне за светом и пространством, сначала робко проникнет за пределы атмосферы, а затем завоюет себе все околосолнечное пространство„

К. Э. Циолковский

Цена 30 коп.
Индекс 70465